2009

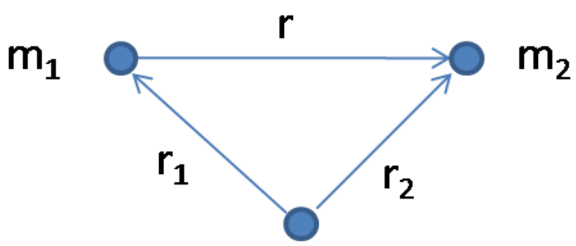
Grundlagen der
Astronomie und Astrophysik

Andre Knecht

[HIMMELSMECHANIK]

3 Erhaltungssätze und die Herleitung der drei Kepler-Gesetze

2-Körperproblem-Gravitationsgesetz



$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

$m = m_1 + m_2$

$F_g = \frac{G\, m_1 m_2}{r^2} - \frac{\vec{r}}{r}$

3 Newton'schen Axiome

Trägheitsgesetz: Ein kräftefreier Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig. [1]

Definition des Impulses:

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$$

Aktionsprinzip(Impulsänderung): Wenn eine Kraft *F* auf einen Körper mit der Masse *m (konstant)* wirkt, beschleunigt sie ihn mit: [1]

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m \cdot \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}}\frac{d}{dt}m + m\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Actio=Reactio:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$$

Mit dem Schwerpunktsatz:

$M \cdot \vec{R} = \sum m_k \vec{r}_k$ R-Ortsvektor

Konstante der Bewegung:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G\, m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{G\, m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

Addition der beiden Konstanten ergibt:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

Es handelt sich hierbei um ein 2- Körperproblem, wobei die Kraft gleich die zweifache Ableitung nach der Zeit ist:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

Lösung der Differentialgleichung durch 2fache Integration in der Zeit:

<u>1.Integration</u>

$\frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{c}_1 = \vec{P}_{Ges}$ → Impulserhaltung

- ➔ 3 Komponenten von $\vec{P}_{Ges}$: 3 Konstanten der Bewegung

<u>2.Integration</u>

$\vec{c}_2$ ist der Schwerpunkt.

Dies kann man auch ausdrücken durch:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{c}_1 \cdot t + \vec{c}_2 = \vec{P}_{Ges} \cdot t + \vec{c}_2$$

Wenn nun nach der Zeit abgeleitet wird, erhalten wir erneut unsere Impulserhaltung.

- ➔ Wir erhalten also 3 Komponenten für $\vec{c}_2$: 3 Konstanten der Bewegung

Betrachten wir nun:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G\ m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \quad |: m_1|$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{G\ m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \quad |: m_2|$$

Wir erhalten:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G\ m_2}{r^3}\vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{G\ m_1}{r^3}\vec{r}$$

Die Gesamtgeschwindigkeit ergibt sich aus den Teilgeschwindigkeiten:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{G\ m_1}{r^3}\vec{r} - \frac{G\ m_2}{r^3}\vec{r} = -\frac{G\ \vec{r}}{r^3}(m_1 + m_2)$$

$$m_1 + m_2 = m_{Ges} = m$$

Nun bilden wir:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times (-\frac{G\ \vec{r}}{r^3}\ m) = -\frac{G\ m}{r^3}(\vec{r} \times \vec{r}) = 0$$

Nach der Produktregel gilt folgende Betrachtung:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = \underbrace{\left(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}\right)}_{= 0} + \underbrace{\left(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}\right)}_{= 0} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$$

Es ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = 0$$

Betrachten wir nun noch zusätzlich die Massen, können wir aber schreiben:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{m}{m}\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\frac{m}{m}\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \quad |\cdot m|$$

Das Kreuzprodukt einer Strecke und eines Impulses ergibt den Drehimpuls $\vec{L}$. Da die Ableitung $\dot{\vec{L}} = 0$ ist, ist $\vec{L} = const$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \leftrightarrow \dot{\vec{L}} = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad \vec{L} = \vec{c_3} = const$$

➔ Drehimpulserhaltung:
3 Komponenten des Gesamtdrehimpulses : 3 Konstanten der Bewegung

2-Körper brauchen insgesamt 12 Komponenten zur eindeutigen Beschreibung
- 3 Impulserhaltung
- 3 Schwerpunktsatz
- 3 Drehimpulserhaltung
- 1 Energieerhaltung

Konstante der Bewegung: Energie:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G\, m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \quad |\cdot \dot{\vec{r_1}}|$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{G\, m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \quad |\cdot \dot{\vec{r_2}}|$$

Nun addieren wir unsere neuen Produkte:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2\dot{\vec{r}}_2 \ (1)$$

Setzen wir nun die Konstanten der Bewegung ein:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2\dot{\vec{r}}_2 = \frac{G\, m_1 m_2}{r^3}\vec{r}\dot{\vec{r}}_1 - \frac{G\, m_1 m_2}{r^3}\vec{r}\dot{\vec{r}}_2 = \frac{G\, m_1 m_2}{r^2}\left[\frac{1}{r}\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}_1\right) - \frac{1}{r}\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}_2\right)\right]$$

Nun ist aber $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$:

$$\frac{G\, m_1 m_2}{r^2}\left[\frac{1}{r}\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}_1\right) - \frac{1}{r}\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}_2\right)\right] = \frac{G\, m_1 m_2}{r^2}\left[\frac{1}{r}\left((\vec{r_2} - \vec{r_1})\cdot\dot{\vec{r}}_1\right) - \frac{1}{r}\left((\vec{r_2} - \vec{r_1})\cdot\dot{\vec{r}}_2\right)\right]$$

Nebenrechnung:

Wenn wir nun die Kettenregel in folgender Art betrachten:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r_1}^2\right) = 2\vec{r}_1\dot{\vec{r_1}}$$

Angewandt auf unseren gesamten Entfernung ergibt das:

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}^2) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})^2] = -(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})(\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1)$$

Rechnen wir nun die Klammer aus und klammern ein Minus aus erhalten wir:

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}^2) = \left[(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})\dot{\vec{r}}_1 - (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})\dot{\vec{r}}_2\right]$$

Das heißt, dass wir in unserer obigen Rechnung den Endterm wie hergeleitet ersetzen können:

$$-\frac{G\, m_1 m_2}{2r^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{d}{dt}(\vec{r}^2)\right]$$

Schreiben wir nun die Gleichung (1) kompakter und fassen zusammen:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2\right) = -\frac{G\, m_1 m_2}{2r^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{d}{dt}(\vec{r}^2)\right]$$

<u>Nebenrechnung</u>:

Für die linke Seite der Formel gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2\right) = \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i}{2} 2 \cdot \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \dot{\vec{r}}_2$$

Es gilt nach Kettenregel:

$$\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{d}{dt}(\vec{r}^2)\right] = \frac{1}{r}\, 2r\, \dot{r} = 2\dot{r}$$

Nun ist aber noch nach der Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\dot{r} \;\; oder\ auch\ \; -r^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \dot{r}$$

Es ergibt sich aus dem ersten Term:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}^2 = 2\dot{r} = -2r^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Dies können wir verwenden und in unsere Ausgangsgleichung einsetzen

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = -\frac{G\,m_1 m_2}{2r^2}\left[-2r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

Nach dem Kürzen erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = G\,m_1 m_2\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

Rechte Seite rüber ziehen und $\frac{d}{dt}$ ausklammern:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) - G\,m_1 m_2\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \frac{G\,m_1 m_2}{r}\right) = 0$$

Dies ist erneut eine Differentialgleichung erster Ordnung, die durch Integration gelöst werden kann:

$$E_{Ges} = \sum_{i=1}^{2}\frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \frac{G\,m_1 m_2}{r} = const = c_4$$

- ➔ Energieerhaltung: 1 Komponente

Die letzen zwei Komponenten beschreiben die Ellipsenbahn, sind also Bahnparameter a, die große Halbachse, und b, die kleine Halbachse. Zusammen benötigen wir also 12 Komponenten um ein 2 Körperproblem zu beschreiben.

2-Körperproblem-Kepler-Gesetz

Also wir betrachten nun den auf der ersten Seite aufgeführten Schwerpunktsatz (Quelle: Der Neue Kosmos 1982) für 2 Körper

$$M \cdot \vec{R} = \sum_{k=1}^{2} m_k \vec{r}_k = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

Für den Ortsvektor R des Schwerpunktes des Systems gilt folglich:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \leftrightarrow M\vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

Betrachten wir nun wieder unsere zum Anfang gemacht Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \leftrightarrow M\ddot{\vec{R}} = \frac{d^2}{dt^2}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0$$

Diese Gleichung ist gleich Null, weil wir den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt legen. Damit also keine triviale Lösung rauskommt (M=0), muss R=0 sein.

Diese Erkenntnis kann man anwenden, um die 3 Kepler-Gesetze herzuleiten.

1.Kepler-Gesetz:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G\,m}{r^3}\vec{r} \qquad \left| \times\ \vec{L} = \times\ (\vec{r} \times \vec{p}) = \times\ (m(\vec{r}\ \times \dot{\vec{r}})) \right|$$

Es ergibt sich:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = -\frac{G\,m^2}{r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

Nach dem Graßmannschen Entwicklungssatz (BAC-CAB-Formel) gilt für $\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$:

$$= -\frac{G\,m^2}{r^3}\left[\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r})\right]$$

Das · ist hierbei das Skalarprodukt, dass heißt, dass aus zwei Vektoren ein Skalar entsteht:

$$= -\frac{G\,m^2}{r^3}\left[\vec{r} r \dot{r} - \dot{\vec{r}} r^2\right]$$

Ausklammern und umstellen ergibt:

$$= \frac{G\,m^2}{r^2}\left[\vec{r}\dot{r} - \dot{\vec{r}} r\right] = G\,m^2 \frac{\vec{r}\dot{r} - \dot{\vec{r}} r}{r^2}$$

Nebenrechnung:

Nach der Quotientenregel gilt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\dot{\vec{r}}r - \dot{r}\vec{r}}{r^2}$$

Einsetzen ergibt:

$$= G\, m^2 \frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = G\, m^2 \frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} \qquad |: Gm^2|$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{1}{Gm^2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r}$$

Und das ist erneut eine Differentialgleichung, die wir durch Integration lösen können.

$$\frac{1}{Gm^2}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right) = \frac{\vec{r}}{r} + const = \frac{\vec{r}}{r} + \varepsilon\, \vec{e}$$

Wobei ε der Betrag der Konstanten ist und e der dementsprechende Einheitsvektor.

Wir multiplizieren nun alles mit $\vec{r}$:

$$\frac{1}{Gm^2}\vec{r}\cdot\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right) = \frac{(\vec{r}\cdot\vec{r})}{r} + \varepsilon(\vec{r}\cdot\vec{e})$$

$$\frac{1}{Gm^2}\vec{r}\cdot\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right) = \frac{1}{Gm^2}\vec{L}\cdot\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right)$$

Erweitern mit $\frac{m}{m}$

$$\frac{1}{Gm^2}\vec{L}\cdot\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = \frac{1}{Gm^2}\frac{m}{m}\vec{L}\cdot\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = \frac{1}{Gm^3}\overrightarrow{L^2} = const = P$$

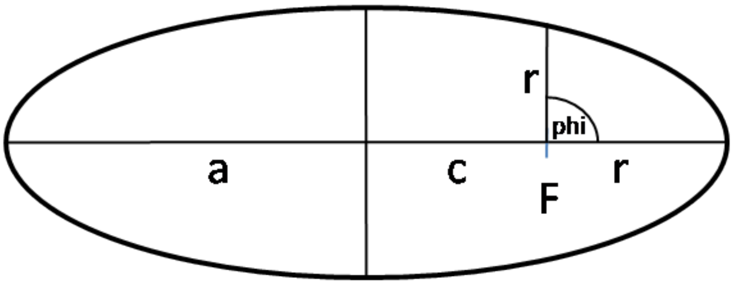
Betrachten wir die andere Seite:

$$\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r})}{r} + \varepsilon(\vec{r}\cdot\vec{e}) = \frac{r^2}{r} + \varepsilon(\vec{r}\cdot\vec{e}) = r + \varepsilon\,|1||r|\cos\varphi = P$$

So entsteht das 1. Kepler-Gesetz:

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \, \cos\varphi} \; oder\; speziell\; für\; Ellipsen\; \frac{L^2}{Gm^3}\frac{1}{1-\varepsilon^2} = a$$

Dies ist eine Ellipsengleichung mit ε als Bahnexzentrizität und φ als wahre Anomalie



Für die große Halbachse a, die numerische Exzentrizität c und die Entfernung r ergibt sich:

$$a = c + rcos\varphi$$

Mit $\varphi = 0$:

$$a = c + r$$

$r = \frac{P}{1+\varepsilon\,\cos\varphi}$ ersetzen und $\varepsilon = \frac{c}{a}$

$$a = c + \frac{P}{1+\frac{c}{a}} \qquad \left|\cdot\left(1+\frac{c}{a}\right)\right|$$

$$a + c = c + \frac{c^2}{a} + P \qquad |-c|$$

$$a = \frac{c^2}{a} + P \qquad |:a|$$

$$1 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{P}{a} \qquad \left|-\frac{c^2}{a^2}\right|$$

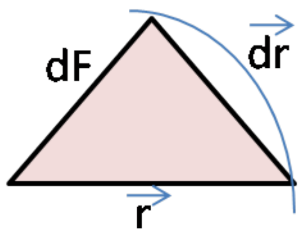
$$1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{P}{a} \qquad |\cdot a| \; \left|:\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\right|$$

$$a = \frac{P}{1-\varepsilon^2}$$

2.Kepler-Gesetz:

Ansatz: Drehimpulserhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = 0 = \dot{\vec{L}}$$



Um eine Fläche zu berechnen, die durch Vektoren erzeugt wird, benutzen wir den Span:

$$dF = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \overrightarrow{dr}|$$

Gesucht ist nun die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right|$$

Mit m erweitert:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2m}|\vec{r} \times \vec{p}| = A$$

Nach Kepler überstreicht man gleiche Fläche in gleicher Zeit, also muss A=const. sein. Wenn wir also nach der Zeit ableiten, also eine Konstante ableiten, müssten wir Null erhalten.

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2m}|\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{d}{dt}A$$

$$\frac{d}{dt}A = \frac{d}{dt}\frac{\vec{L}}{2m} = \frac{d}{dt}(const) = 0$$

3.Kepler-Gesetz:

Wir betrachten die Fläche einer Ellipse:

$$\pi \cdot a \cdot b = \int_0^T \frac{dF}{dt} dt = \int_0^T A\, dt = A(T-0) = AT$$

Wobei A gegeben ist als Flächengeschwindigkeit $A = \frac{\vec{L}}{2m}$ und T als Umlaufzeit.

Mit dieser Erkenntnis gehen wir an das 1.Kepler-Gesetz:

$$\frac{L^2}{Gm^3} \frac{1}{1-\varepsilon^2} = a \leftrightarrow \sqrt{(1-\varepsilon^2)} = \sqrt{\frac{L^2}{Gm^3 a}}$$

Es folgt mit $b = a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}$:

$$\frac{\vec{L}T}{2m} = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot a \cdot a\sqrt{(1-\varepsilon^2)} = \pi \cdot a^2\sqrt{(1-\varepsilon^2)}$$

Einsetzen und nach T auflösen ergibt:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm}$$

Das dritte Kepler-Gesetz kann man auch über Radialkraft und Gravitationskraft bestimmen!!!

Quellen:

[1] Gerthsen Physik, Dieter Meschede, 23. Auflage, Springer-Verlag, ISBN-13 978-3-540-25421-8

WS-Vorlesung Grundlagen der Astronomie und Astrophysik bei Frau Dr. Patzer

Skripte zu den Grundlagen der Astronomie und Astrophysik TU-Berlin