Astrophysikalische Staubbildung unter fluktuierenden Temperaturbedingungen

vorgelegt von
Dipl.-Phys., Dipl.-Math. Ulrich Dirks M.A.
aus Berlin

Vom Fachbereich 4 (Physik)
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuß:

Vorsitzender: Prof. Dr. W. Muschik
Berichter: Prof. Dr. E. Sedlmayr
Berichter: Priv.-Doz. Dr. J.-P. Kaufmann

Tag der mündlichen Prüfung: 8. März 2000

Berlin 2000

D 83

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **iii**

1 Staub und Temperaturfluktuation **1**
1.1 Staubbildung und -wachstum 2
1.2 Deterministisches Windmodell 5
1.3 Auftreten von Temperaturfluktuationen 5

2 Staubbildung als stochastischer Prozeß **9**
2.1 Mathematische Grundlagen 9
2.2 Physik in stochastischen Prozessen 17
2.3 Fokker-Planck-Gleichung 21

3 Übergangswahrscheinlichkeiten **25**
3.1 Stochastik der Temperaturfluktuation 26
3.2 Prozeßkomponente der Staubbildung 34
3.3 Koeffizientenfunktionen 36

4 Anfangs-/Randwertproblem **41**
4.1 Transformationen des Fokker-Planck-Systems 41
4.2 Anfangs- und Randbedingungen 45

5 Numerische Behandlung **49**
5.1 Diskretisierung 49
5.2 Bemerkung zur Computerbearbeitung 53

6 Ergebnisse **55**
6.1 Turbulenzeffekte 56
6.2 Variation des Windmodells 64
6.3 Einfluß der Randbedingungen 71

7 Zusammenfassung **75**

A Mathematische Begriffe **77**

B Weitere Abbildungen **85**

Abbildungsverzeichnis **93**

Literaturverzeichnis **95**

Curriculum Vitae **99**

Einleitung

Das Auftreten von Festkörpern spielt eine kardinale Rolle bei der Prozessierung der Materie im Weltall. Nicht nur die zeitliche Entwicklung von Sternen, die Evolution der interstellaren Materie und die Ausbildung von Planetensystemen wären undenkbar ohne das Entstehen zunächst kleiner Staubkörner, sondern auch die meisten chemischen Reaktionen könnten ohne die durch die Cluster hergestellte, erste physikalische Oberfläche im Universum nicht statthaben, womit die materielle Grundlage von Leben der uns bekannten Art nicht bestünde.

Nukleation und Wachstum von Staub ist astrophysikalisch insbesondere in den stellaren Winden von kühlen Riesen und Überriesen anzutreffen. In den vorliegenden Modellen für die circumstellaren Staubhüllen von Asymptotic Giant Branch–Sternen, die stellare Winde mit deren Chemie, Hydrodynamik, Thermodynamik und Strahlungstransport konsistent im Zusammenwirken mit Staubbildung zu beschreiben vermögen, bleibt bislang der Umstand weitgehend unberücksichtigt, daß Sternatmosphären offenkundig turbulente physikalische Systeme sind.

Ziel der nachfolgenden Arbeit ist es daher, die Effekte von irregulären Schwankungen der Temperatur, die entscheidenden Einfluß auf die Vorgänge bei Staubbildung und -wachstum / -verdampfung hat, prototypartig zu untersuchen. Die für eine statistische Beschreibung der astrophysikalischen Staubbildung unter dem Einfluß solcher Temperaturfluktuationen verfolgte mathematische Zugangsweise einer Formulierung der Physik in stochastischen Prozessen soll dabei gleichzeitig die Verbindung leisten zwischen der physikalischen Problemsituation, für die keine befriedigende Turbulenztheorie vorliegt, und den in der Mathematik vorhandenen leistungsfähigen stochastischen Methoden. Mit der Allgemeinheit des verwendeten Instrumentariums ergeben sich daher Hinweise für das Vorgehen einer zukünftigen Einbeziehung auch anderer physikalischer bzw. chemischer Größen in die Turbulenzuntersuchungen sowie auf Veränderungsmöglichkeiten in der Statistik der Fluktuation.

Die auf dieser Grundlage entwickelte Modellbildung führt zu einem Anfangs- / Randwertproblem mit einem System von partiellen Differentialgleichungen vom Fokker-Planck-Typ, das unter Vorgabe eines geeigneten, stellaren Windmodells und bei Variation der die stochastische Fluktuation kenn-

zeichnenden Größen einer numerischen Behandlung zugeführt wird.

Die erzielten Ergebnisse werden zeigen, daß Temperaturfluktuationen einen erheblichen Einfluß auf die Nukleation und den weiteren Verlauf der Staubbildung ausüben. Insbesondere setzt, bei geeigneten Turbulenzbedingungen, die Staubbildung deutlich früher im stellaren Wind ein, und auch der Bereich innerhalb der Sternatmosphäre, der für effektive Staubbildung relevant ist, zeigt sich bei gleichzeitig sehr charakteristischem Verlauf der Erwartungswerte der die Staubbildung beschreibenden Momente gegenüber der bekannten deterministischen Berechnung erheblich verbreitert. In diesem Sinne können Temperaturfluktuationen als ein die Ausbildung von Staubpartikeln befördernder physikalischer Einfluß gewertet werden (– zu den detaillierten Ergebnissen s. Kapitel 6).

Mein nachdrücklicher Dank gilt dem Betreuer des Projektes und ersten Berichter der Dissertationsschrift, Prof. Dr. E. Sedlmayr, der mit seinen wertvollen und maßgeblichen Hinweisen sowie seiner umfassenden Unterstützung meiner Bemühungen das Entstehen der vorliegenden Arbeit entscheidend befördert hat.

Ferner danke ich allen Personen, die beim Entstehen dieser Arbeit mitgeholfen haben, insbesondere den Mitarbeiterinnen und Mitarbeiten des Instituts für Astronomie und Astrophysik der Technischen Universität Berlin, wo ich in mehrfachen Seminar- und Colloquiumsvorträgen meine Untersuchungen zur Diskussion stellen konnte. Namentlich haben sich Arbeitsgespräche mit Dr. J. M. Winters dankenswert als ebenso förderlich erwiesen, wie der aufopferungsvolle und ermunternde Einsatz des von mir mitangeleiteten Diplomanden Frank Müller im Zusammenhang mit der rechnergestützten Umsetzung des Problems.[1] Dr. habil. J.–P. Kaufmann gilt mein Dank für die Übernahme der Zweitberichterstattung, Prof. Dr. W. Muschik für den Vorsitz des Promotionsausschusses.

Die Niederschrift der vorliegenden Arbeit erfolgte mit LaTeX 2ε bzw. dessen Macintosh-Implementierung OzTeX .

[1] Siehe auch S. 53 Anm. 6, S. 55 Anm. 1 und S. 68 Anm. 4.

Kapitel 1

Staubbildung und Temperaturfluktuationen

Kühle, kohlenstoffreiche stellare Winde, wie sie bei Roten Riesen und Überriesen auftreten, stellen den Grundtypus der astrophysikalischen Systeme unserer nachfolgenden Untersuchungen dar. Sterne dieser Art im späten Stadium der Sternentwicklung, nach ihrer (rechten / oberen) Lage im Hertzsprung-Russel-Diagramm AGB-Sterne ('asymptotic giant branch objects') genannt, besitzen insbesondere aufgrund ihrer ausgedehnten, kühlen Hüllen sowie ihrer hohen Massenverlustrate geeignete Voraussetzungen für die effektive Bildung von Staub, der in Form von ausgedehnten circumstellaren Hüllen zu beobachten ist.

Avancierte Modelle liegen vor zum Zusammenwirken von Staubbildung, Chemie, Hydrodynamik, Thermodynamik und Strahlungstransport, die den stellaren Wind als staubbildendes System konsistent und quantitativ zu beschreiben vermögen.[1] Gleichwohl bleibt dabei die Frage nach dem Effekt offen, den der offenkundig turbulente Charakter einer Sternatmosphäre auf den Vorgang der Ausbildung einer Staubhülle bei diesen Objekten hat. Beobachtungsbefunde wie die ersichtlich wolkenartig 'klumpige' Struktur der Staubverteilung in der Hülle des Kohlenstoffsternes IRC +10 216 lassen eine dramatische Beeinflussung durch Turbulenzeffekte vermuten.[2]

Für den Beitrag zur Untersuchung dieses Problems ist es in der vorliegenden Arbeit angezeigt und ausreichend, einen vergleichsweise einfachen Prototyp sowohl des stellaren Windes als auch des Prozesses von Staubbildung und -wachstum zugrundezulegen, um hieran typische Turbulenzeffekte deutlich machen zu können bei der systematischen Einbeziehung von Fluktuationen der Temperatur, von welcher die chemische Bildung von Kohlenstoffclustern sowie die sich anschließenden Wachstums- und Vernichtungs-

[1] S. [Sedlmayr, Winters 97] und [Sedlmayr, Dominik 95] mit jeweils den dortigen Referenzen.

[2] S. [Weigelt et al. 98].

prozesse empfindlich abhängen.

In einem ersten Schritt (Abschnitt 1.1) ist daher kurz auf ein Gleichungssystem einzugehen, daß in hinreichender Näherung Bildung und Wachstum von Staub bei nicht-stochastischen Temperatursituationen beschreibt. Sodann sind in Abschnitt 1.2 Bemerkungen zu einfachen Formen von Windmodellen, die in unserer Modellrechnung herangezogen werden, anzuschließen, um schließlich in Abschnitt 1.3 das Auftreten von Temperaturfluktuationen zu diskutieren.

1.1 Staubbildung und -wachstum in kühlen Sternatmosphären

Beginnend mit [Gail et al. 84] sowie insbesondere [Gail, Sedlmayr 88] liegt durch Gail und Sedlmayr (et al.) ein entwickeltes physikalisches Modell zu Bildung und Wachstum von Staub in stellaren Winden vor.[3] Das Vorhandensein von Staubkörnen, z. B. Kohlenstoffclustern, im stellaren Wind kann beschrieben werden durch eine Verteilungsfunktion $f(N,t)$, welche die Anzahldichte von Körnern der Größe N zur Zeit t angibt. Es wird definiert (mit d als der geometrischen Dimension der Teilchen)

$$\underline{K}_j(t) := \sum_{N=N_l}^{N_{\max}} N^{j/d}\, f(N,t) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)\,.$$

Dabei ist N_l die untere Grenze, ab der man die Staubkörner als makroskopische Teilchen betrachten kann (also etwa $N_l \approx 1000$).

Es ergeben sich für diese Momente folgende physikalische Interpretationen:

$\underline{K}_0$	Teilchenzahldichte der Staubkörner,
$r_0 \dfrac{\underline{K}_1}{\underline{K}_0}$	mittlerer Kornradius (mit hypothetischem Monomerradius r_0),
$4\pi r_0^2 \dfrac{\underline{K}_2}{\underline{K}_0}$	mittlere Oberfläche,
$\underline{K}_3$	Anzahldichte der zu Körnern kondensierten Materie,
$\dfrac{\underline{K}_3}{\underline{K}_0}$	mittlere Teilchengröße der Körner $(d = 3)$.

[3] Für einen Überblick s. hierzu z. B. die Darstellungen [Sedlmayr, Winters 97] und [Gail, Sedlmayr 87].

Staubbildung und Wachstum der Cluster zu berechnen, besteht nunmehr im Kern darin, folgendes System von Momentengleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{K}_0}{dt} &= J_{N_l} \\ \frac{d\underline{K}_j}{dt} &= \frac{j}{d}\,\frac{1}{\tau_{\rm gr}}\,\underline{K}_{j-1} + N_l^{j/d}\,J_{N_l} \qquad \text{für } j = 1,2,3 \quad .^{4} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei ist $\tau_{\rm gr}$ als Zeitskala der Reaktionskinetik die charakteristische Zeit für das Anwachsen eines Staubteilchens zu einer spezifischen Größe, insofern im 'Clustergrößenraum' die Zahl der Monomere, die pro Sekunde, Staubteilchen und Monomeroberfläche auf dem Staubteilchen aufwachsen, durch ${\tau_{\rm gr}}^{-1}$ gegeben wird. J_{N_l} beschreibt als Nukleationsrate die Bildung von Staubkörnern der Grenzgröße makroskopischer Partikel pro Volumen- und Zeiteinheit. Beide Größen, $\tau_{\rm gr}$ und J_{N_l} , sind Resultate von Theorien der Staubnukleation.[5] Zu betonen ist ihre kardinale Abhängigkeit von der Temperatur, so daß bei beiden Größen Effekte durch Temperaturfluktuationen zu erwarten sind.

Vereinfachend setzen wir im Prototypmodell eine Situation thermodynamischen Gleichgewichtes voraus, bei der nicht unterschieden wird zwischen der Temperatur der Staubkörner und der des umgebenden Gases.

Ferner gehen wir vereinfachend von einer stationären Nukleationsrate aus und schreiben für diese $J_\star$.[6]

Im Sinne unserer Prototyp-Untersuchung ist nachfolgende Approximation von (1.1) ausreichend:[7]

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{K}_0}{dt} &= J_\star \\ \frac{d\underline{K}_j}{dt} &= \frac{j}{d}\,\frac{1}{\tau_{\rm gr}}\,\underline{K}_{j-1} \qquad \text{für } j = 1,2,3 \quad . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Die Momentengleichungen sind zu ergänzen durch eine die Chemie des Modells mit dem Verbrauch des staubbildenden Ausgangsmaterials koppelnde Gleichung; für die Bestimmung des Verbrauchs kann offensichtlich $\underline{K}_3$ herangezogen werden. Beispielsweise gilt im einfachsten Falle einer homomolekularen, homogenen Kohlenstoffkondensation

$$\frac{dn_{<C>}}{dt} = -\,\frac{d\underline{K}_3}{dt} \qquad ,$$

[4] S. [Gail, Sedlmayr 88] Gleichungen (32) und (73).

[5] S. insbesondere [Gail, Sedlmayr 88] und den Überblick in [Sedlmayr, Winters 97] 3.2 .

[6] Insbesondere die Zeitskalenvergleiche in [Gail, Sedlmayr 88] und [Gauger et al. 90] ergeben, daß die Bildung der kritischen Cluster (N_l) und mithin die Berechnung der Nukleationsrate als stationäres Problem behandelt werden können.

[7] Beispielsweise betonen [Sedlmayr, Winters 97] 3.2 und [Gail, Sedlmayr 88] 5.3 die damit erhaltene gute Approximation für die meisten astrophysikalischen Situationen.

mit Anzahldichte $n_{<C>}$ des Kohlenstoffs.[8]

Mit [Gauger et al. 90] liegt ferner eine Untersuchung vor, die neben der Bildung und dem Wachstum von Staub auch die Vernichtung von Staub durch Verdampfung berücksichtigt. Dies führt in (1.1) bzw. (in der hier gegebenen Vereinfachung) (1.2) entsprechend zu einer die Staubentwicklung beschreibenden Rate J, die sich ergibt aus der Bildungsrate (pro Zeiteinheit und Volumen) von makroskopischen Teilchenclustern und der Rate für die Zerstörung makroskopischer Staubteilchen, sowie zu einer Zeitskala $1/\tau$, die als Differenz zwischen Wachstums- und Verdampfungszeitskala eine Nettorate für Teilchenwachstum und -verdampfung darstellt.[9]

In dem von uns untersuchten Fall wird die Bildung von reinen Kohlenstoffclustern im stellaren Wind betrachtet, für den Elementüberhäufigkeiten von Kohlenstoff zu Sauerstoff im Bereich $\varepsilon_C : \varepsilon_O = 1{,}5 \ldots 10$ angenommen werden können. Nach [Gail, Sedlmayr 88] figuriert (bei nicht zu geringen Teilchenzahlen) als wichtigster Wachstumsprozeß für Graphit-Staub heteromolekulares Wachstum in Form von chemischen Reaktionen[10] zwischen Kohlenstoffclustern und auftreffenden Molekülen aus der Gasphase der Art

$$\mathrm{C}_{N-i} + \mathrm{C}_j\mathrm{A}_k\mathrm{B}_l \cdots \rightarrow \mathrm{C}_N + \mathrm{C}_{j-i}\mathrm{A}_k\mathrm{B}_l \cdots \qquad .$$

Die Klasse dieser Reaktionen wird ihrerseits dominiert von der Reaktion reiner Kohlenstoffcluster mit Acetylen,

$$\mathrm{C}_{N-2} + \mathrm{C}_2\mathrm{H}_2 \rightarrow \mathrm{C}_N + \mathrm{H}_2 \qquad ,$$

sowie nachfolgend von der Reaktion

$$\mathrm{C}_{N-2} + \mathrm{C}_2\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{C}_N + \mathrm{H} \qquad .$$

Ferner sei das Momentengleichungssystem für spätere Zwecke in Matrixform

$$\frac{d}{dt}\underline{K} = \underline{\underline{A}}\,\underline{K} + \underline{b}$$

dargestellt, äquivalent (bei $d = 3$) für:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\underline{K}_0\\ \underline{K}_1\\ \underline{K}_2\\ \underline{K}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{3}\,\tau^{-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3}\,\tau^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \tau^{-1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{K}_0\\ \underline{K}_1\\ \underline{K}_2\\ \underline{K}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}J_\star\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad . \tag{1.3}$$

[8] Vgl. allgemeiner [Gail et al. 84].

[9] Für die Details s. [Gauger et al. 90], insb. Kap. 2 .

[10] Hinsichtlich unserer 'Wahl' der Temperatur als vorrangig zu behandelnder Größe bei der Untersuchung von Turbulenzeffekten gilt es zu betonen, daß der Verlauf chemischer Reaktionen sensibel von der Temperatur abhängt, wie es etwa im Arrhenius-Gesetz für Reaktionsgeschwindigkeiten exponentiell zum Ausdruck kommt.

1.2 Deterministisches Windmodell

Die Methodik des weiteren Vorgehens wird sein, Fluktuationseffekte der Temperatur im stellaren Wind ausgehend von einer deterministisch beschriebenen Situation statistisch in die Betrachtungen einzubeziehen. Da das Modell – vereinfachend – mithin (a) nicht eine etwa aus einer Physik der Turbulenz errechnete Sternatmosphäre zugrundelegt[11] und (b) entsprechend auch keine Rückwirkung von Staubbildung auf die Turbulenz des Windes, folglich auch nicht (vollständig) auf den Antriebsmechanismus des Windes selbstkonsistent berücksichtigen kann (vgl. u. Abschnitt 1.3), ist ein geeignetes Stern- bzw. Windmodell *vorzugeben*. Da es auf eine Auswertung der charakteristischen Effekte der Temperaturfluktuationen im Unterschied zu einem deterministisch gerechneten Modell ankommt, kann das Windmodell als Prototyp vergleichsweise einfach gehalten werden.

Es gilt, in einer astrophysikalisch sinnvollen Wahl einen geeigneten Stern zu spezifizieren durch Vorgabe von Masse M_s , Massenverlustrate $\dot{M}$, Radius R_s , Effektivtemperatur $T_{\rm eff}$ (bzw. Leuchtkraft $L_s = 4\pi R_s^2 \sigma T_{\rm eff}^4$).

Bei gleichzeitiger Vorgabe eines Geschwindigkeitsprofils, z. B. radial $v(r)$ bei sphärisch symmetrischer Atmosphäre, sind übliche Beispiele für (deterministisch konzipierte) Modellannahmen der Verhältnisse im stellaren Wind:[12]

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 v} \quad , \\ \bar{T}(r) &= T_s \left(\frac{R_s}{r} \right)^{\alpha} \quad , \end{aligned} \tag{1.4}$$

mit einer vorgegebenen Oberflächentemperatur T_s des Sterns. Der Druck ergibt sich dabei etwa aus dem idealen Gasgesetz.

1.3 Auftreten von Temperaturfluktuationen

Annahmen wie (1.4) über einen deterministischen Temperaturverlauf berücksichtigen nicht, daß Sternatmosphären offenkundig physikalische Systeme sind, in denen das raum-zeitliche Temperaturfeld fluktuierenden Charakter hat, d. h. irregulären Schwankungen unterliegt:

[11] Eine solche Möglichkeit liegt in der hier benötigten Spezifikation in der Tat derzeit nicht vor.

[12] Vgl. etwa [Gail et al. 84]. Im angegebenen Beispiel sind offensichtlich z. B. auch keine Aspekte des Strahlungstransportes oder einer Geschwindigkeitsstratifikation nach unterschiedlichen Staubteilchengrößen einbezogen; dies wird im Sinne der Zielsetzung der vorliegenden Arbeit auch bei den nachfolgenden Untersuchungen keine Berücksichtigung finden. Gleichwohl gibt es keine grundsätzlichen methodischen Unterschiede bei der unserem Vorgehen entsprechenden Einarbeitung von Fluktuationseffekten in avanciertere Windmodelle.

Schallwellen – Die äußeren Schichten von Sternen sind Zonen, in denen turbulente hydrodynamische Vorgänge stattfinden. Aufsteigende Turbulenzelemente ('Materieballen') aus tieferen Konvektionsschichten, wie sie bei Riesen und Überriesen als ausgedehnte Wasserstoff- und Heliumkonvektionszonen auftreten, stoßen an die Photosphäre. Solche Turbulenzen sind für Schallanregung verantwortlich zu machen,[13] so daß man mit den durch die Photosphäre laufenden Schallwellen auch in den äußeren Schichten der Atmosphäre von einem akustischen Rauschen auszugehen hat, das mit den sich solchermaßen zufällig überlagernden Druckschwankungen auch zu Temperaturfluktuationen am Ort der Staubentstehung und des Staubwachstums im stellaren Wind führt.

Magnetohydrodynamische Wellen – Das System magnetohydrodynamischer Gleichungen für eine Sternatmosphäre als kompressibles Plasma liefert für die Ausbreitung kleiner Störungen, z. B. von Magnetfeldschwankungen, u. a. magnetohydrodynamische Kompressionswellen als Lösung,[14] so daß das solchermaßen hervorgerufene Schallwellenfeld für Temperaturschwankungen sorgt, die im nachfolgenden Ansatz miterfaßt sind, obwohl keine explizite Einbeziehung der Wirkung von Magnetfeldern in Staubentstehungsrechnungen erfolgt.

Stoßwellen – Verdichtungsstöße durch Pulsationen von Sternen, das Aufsteilen von Schallwellen wie auch der Übergang magnetohydrodynamischer Kompressionswellen zu (magnetoakustischen) Stoßwellen führen in den höheren, dünneren Atmosphärenschichten zu Stoßwellen, als fortschreitende Sprungstellen in Dichte und Druck, und damit über rasche Druckschwankungen zu stochastischen Fluktuationen der Temperatur.[15]

Ein solchermaßen vorliegendes Phänomen der Turbulenz von Feldgrößen im stellaren Wind als Folge der Gesamtheit aller statistischen Einflüsse, wie das sich zufällig überlagernde Schall- und Stoßwellenfeld, erfordert offensichtlich einen Ansatz, der Fluktuationen genuin berücksichtigt. Im Sinne des in der vorliegenden Arbeit zu entwickelnden Prototyps einer Einbeziehung solcher Einflüsse auf Staubbildung in kühlen stellaren Winden wird die Untersuchung entlang der für den Prozeß der Kohlenstoffnukleation und des Aufwachsens und Verdampfens weiteren Materials auf die Körner wichtigsten physikalischen Größe durchgeführt, der Temperatur. Der zu entwickelnde Ansatz wird dabei (bis in die Programmierung des Problems hinein) eine Klärung leisten, wie in analoger Vorgehensweise zusätzlich in an dieses Projekt anschließbaren Schritten ein fluktuierender Dichteparameter einzubeziehen ist und in der zugrundeliegenden – ebenfalls auf einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung beruhenden – Chemie Fluktuationen zu behandeln sind.

[13] Vgl. [Landau, Lifschitz 91a] § 75.
[14] S. [Kippenhahn et al. 75] Kap. IV und [Landau, Lifschitz 91b] §§ 69 ff.
[15] S. [Landau, Lifschitz 91a] Kap. IX und [Landau, Lifschitz 91b] §§ 72 f.

Aufgrund des Fehlens einer befriedigenden Turbulenztheorie für Sternatmosphären sowie aufgrund des Mangels von auf Beobachtungsmaterial gestütztem quantitativen Wissen über solche Fluktuationen wird das Problem im nachfolgenden Ansatz einer stochastischen Beschreibung zugeführt, die in ihrem statistischen Vorgehen nicht auf die physikalischen Ursachen der Fluktuationen eingeht. Mithin ist das im Folgenden entwickelte Modell insbesondere insofern nicht 'selbst-konsistent', als keine systematische Wechselwirkung zwischen der Staubentstehung und den physikalischen Mechanismen der Turbulenz des stellaren Windes entwickelt wird.[16]

[16]Die so gefaßte Situation zeigt eine Verwandtschaft zur physikalischen Ausgangslage bei dem Problem der Linienbildung in turbulenten Geschwindigkeitsfeldern. Als Forschungsbeiträge, die insbesondere in ihrer physikalischen Problemkonstituierung als hilfreich und richtungsweisend für den hier vorgestellten Ansatz anzusprechen sind, sind aus diesem Bereich zu nennen: [Gail et al. 74], [Gail, Sedlmayr 74] und [Gail et al. 80].

Kapitel 2

Staubbildung als stochastischer Prozeß

Unser Vorgehen, die Temperaturfluktuationen im stellaren Wind einer statistischen Beschreibung zuzuführen, bedeutet in der theoretischen Formulierung im Kern, Staubbildung unter Temperaturturbulenzen als stochastischen Prozeß zu begreifen. Das nachfolgende Kapitel hat daher die Zielsetzung, die probabilistische Modellierung des Problemzuganges zu leisten.

Für den in unserer physikalischen Problemlage anzusetzenden stochastischen Prozeß kann begründet die Markov-Eigenschaft angenommen werden (Abschnitt 2.2). Diese eröffnet den Weg, für die Ein-Punkt-Wahrscheinlichkeitsdichte des Prozesses eine Fokker-Planck-Gleichung aufzustellen (Abschnitt 2.3). Als Vorbemerkung stellt Abschnitt 2.1 die notwendigen mathematischen Grundlagen bereit.[1]

2.1 Mathematische Grundlagen

Nachfolgend wird in drei kurzen Schritten das für unseren Ansatz wesentliche mathematische Instrumentarium bereitgestellt: Zunächst ist der Begriff des stochastischen Prozesses darzulegen, mithilfe dessen Temperatur- und Staubbildungsverlauf probabilistisch formuliert werden (s. Abschnitt 2.2); sodann gibt der Fundamentalsatz von Kolmogorov (2.5) die Möglichkeit frei, stochastische Prozesse aus vorgegebenen, sog. endlich-dimensionalen Verteilungen zu konstruieren; schließlich wird das Konzept bedingter Wahrscheinlichkeiten skizziert, das für die physikalisch wichtige Größe der 'Übergangswahrscheinlichkeit' tragend ist.

[1] Wichtige mathematische Begriffe, im Text mit dem Symbol * bei der erstmaligen Verwendung gekennzeichnet, werden in der Reihenfolge ihres Auftretens in Anhang A erläutert. S. ferner [Dirks 93].

Durch Transport eines W-Maßes* P von einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ in ihren Zustandsraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ induziert eine Zufallsgröße* X auf dem Bild-Meßraum* ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_X, das die stochastisch relevanten Informationen über X enthält:

$$P_X(B) := P\left(X^{-1}(B)\right) = P\left(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in B\}\right) \qquad \text{für alle } B \in \mathcal{B}^n.$$

P_X heißt Verteilung der Zufallsgröße X; die Verteilungsfunktion ist gegeben durch die Abbildung $F_P \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \quad &\mapsto \quad F_P(\boldsymbol{x}) := P(X \leq \boldsymbol{x}) := \\ &\qquad P\left(\{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_n(\omega) \leq x_n\}\right) \quad . \end{aligned}$$

Im späteren physikalischen Modell werden die Zufallsgrößen als absolut stetig* vorausgesetzt werden können, so daß eine Dichte* $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ existiert mit[2]

$$\begin{aligned} \int \cdots \int f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \quad &= \quad 1 \qquad\qquad \text{und} \\ F(x_1, \ldots, x_n) \quad &= \quad \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \quad . \end{aligned}$$

Für die Zufallsgröße X ist mithin die gemeinsame Wahrscheinlichkeit dafür, daß X_1 einen Wert in $[x_1, x_1+\Delta x_1]$ und X_2 einen Wert in $[x_2, x_2+\Delta x_2]$ usw. annehmen, für hinreichend kleine Δx_i gegeben durch

$$f(x_1, \ldots, x_n) \Delta x_1 \cdots \Delta x_n \quad .$$

Von besonderem physikalischen Interesse sind stets die Momente* von Zufallsgrößen; dabei bezeichne $\mathrm{E}(X)$ den Erwartungswert*, $\mathrm{Var}(X)$ die Varianz*, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ die Covarianzmatrix* und $\mathrm{E}(X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n})$ das $(k_1, \ldots, k_n)$-te gemischte Moment* der Ordnung $k_1 + \cdots + k_n$. Für den Erwartungswert einer n-dimensionalen, absolut stetigen Zufallsgröße X mit Dichte f ergibt

[2] Verwendet ist hierbei die übliche Schreibweise für Lebesgue-Integrale.

sich

$$\mathrm{E}(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{x} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \\ \vdots \\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_n f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \end{pmatrix}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} \int\limits_{\mathbb{R}} x_1 f_1(x_1)\, dx_1 \\ \vdots \\ \int\limits_{\mathbb{R}} x_n f_n(x_n)\, dx_n \end{pmatrix} \quad , \tag{2.1}$$

mit f_i Dichte von X_i.

Jedes System von Teilmengen einer Menge Ω erzeugt eine kleinste dieses System enthaltende σ-Algebra auf Ω.[3] Als $\mathcal{A}(X_i\,; i \in I)$ sei die von einer Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Zufallsgrößen mit Zustandsräumen $(\Omega_i,\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ durch $\bigcup_{i\in I} X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet. Für endlich viele meßbare Räume $(\Omega_i,\mathcal{A}_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ erzeugen die Projektionsabbildungen

$$p_i \colon \Omega \to \Omega_i \quad , \qquad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto p_i(\omega) := \omega_i \quad ,$$

mit $\Omega := \prod_{i=1}^n \Omega_i = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, eine σ-Algebra, die als das Produkt $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ der σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ bezeichnet wird. $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ wird dabei erzeugt von den Zylindermengen, d. h. von der Gesamtheit aller Mengen der Form $A_1 \times \cdots \times A_n$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$.[4]

Für beliebige Indexmengen I ist $\Omega_i := \prod_{i\in I} \Omega_i$ die Menge aller Abbildungen

$$\omega \colon I \to \bigcup_{i\in I} \Omega_i \quad \text{mit} \quad \omega(i) \in \Omega_i \quad (i \in I) \quad .$$

Die von den Projektionsabbildungen p_i erzeugte σ-Algebra wird als Produkt $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$ der Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ von σ-Algebren bezeichnet. Es sei $\mathcal{H}(I)$ das System aller nichtleeren endlichen Teilmengen von I; dann ist

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}(p_J; J \in \mathcal{H}(I)) \quad , \tag{2.2}$$

[3] [Bauer 92] Folgerung aus Satz 1.2 .
[4] [Bauer 92] Satz 22.1 .

wobei die erzeugenden p_J die Restriktionen $p_J\colon \Omega_I \to \Omega_J$ bezeichnen.[5] Auch hier wird die σ-Algebra (2.2) vom System $\mathcal{Z}$ aller Zylindermengen

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{J\in\mathcal{H}} \mathcal{Z}_J \quad \text{mit} \quad \mathcal{Z}_J := p_J^{-1}(\mathcal{A}_J)$$

erzeugt, wobei $\mathcal{A}_J$ die von den Mengen $\prod_{i\in J} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i\,(i \in J)$ erzeugte σ-Algebra ist. Die erzeugenden Zylinder A sind dabei darstellbar in der Form

$$A = \prod_{i\in I} A_i \quad \text{, wobei } A_i \in \mathcal{A}_i\ (i \in I) \text{ mit } A_i \neq \Omega_i \text{ nur endlich oft,} \qquad (2.3)$$

d. h. als Menge von Abbildungen $\omega\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ mit $\omega(k) \in A_k\,(k = 1, \dots, n)$, falls $A_1, \dots, A_n$ diese einschränkenden Mengen bezeichnen.

Definition 2.1 *1. Seien $X_i\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega_i,\mathcal{A}_i)$, $i = 1, \dots, n$, Zufallsgrößen. Dann heißt die Verteilung der Zufallsgröße $X := (X_1, \dots, X_n)\colon \Omega \to \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ auf dem meßbaren Raum $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i)$ gemeinsame Verteilung der X_i.*

2. Seien $X_i\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega_i,\mathcal{A}_i)$, $i \in I$ (beliebige Indexmenge), Zufallsgrößen. Die gemeinsame Verteilung der Familie $(X_i)_{i\in I}$ wird definiert als die Verteilung der Zufallsgröße X auf $\left(\prod_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i\right)$, mit

$$X := \bigotimes_{i\in I} X_i\colon \quad \Omega \ \to \prod_{i\in I} \Omega_i \quad ,$$

$$\omega \ \mapsto X(\omega) := \left\{ I \to \bigcup_{i\in I} \Omega_i, i \mapsto X_i(\omega) \right\} \quad .$$

Definition 2.2 *Auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt eine Familie $(X_t)_{t\in I}$ von Zufallsvariablen mit Werten in einem gemeinsamen meßbaren Raum $(E,\mathcal{A}')$ stochastischer Prozeß mit Indexmenge I und Zustandsraum $(E,\mathcal{A}')$. Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung $X_{(\cdot)}(\omega)\colon I \to E$, $t \mapsto X_t(\omega)$ Realisierung bzw. Trajektorie bzw. Pfad des stochastischen Prozesses.*

Definition 2.3 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t\in I})$ ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum $(E,\mathcal{A}')$. Dann heißt das System der gemeinsamen Verteilungen*

$$(E^J, \mathcal{A}'^J, P_J)_{J\in\mathcal{H}} := \left(\prod_{t\in J} E_t, \bigotimes_{t\in J} \mathcal{A}'_t, P_J \right)_{J\in\mathcal{H}(I)} \quad ,$$

mit $E_t = E$ und $\mathcal{A}'_t = \mathcal{A}'$ f. a. $t \in J$, die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen des Prozesses.

[5] S. hierzu und im folgenden [Bauer 92] § 9 .

Für den stochastischen Prozeß $(X_t)_{t\in I}$ ist mithin eine Hierarchie endlich-dimensionaler Verteilungen gegeben:

$$\{P_m(A_1 \times \cdots \times A_m) = P(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_m} \in A_m)\}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$, alle $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset I$ und alle $A_i \in \mathcal{A}'$ $(i = 1, \ldots, m)$; bzw. bei Existenz von Dichten in der Form:

$$\{p_m(t_1, \boldsymbol{x}_1; \ldots; t_m, \boldsymbol{x}_m)\}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$, alle $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset I$ und alle $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$.

$p_m(t_1, \boldsymbol{x}_1; \ldots; t_m, \boldsymbol{x}_m)\Delta\boldsymbol{x}_1 \cdots \Delta\boldsymbol{x}_m$ ist für hinreichend kleine $\Delta\boldsymbol{x}_i$ zu interpretieren als die gemeinsame Wahrscheinlichkeit dafür, daß X_1 einen Wert in $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 + \Delta\boldsymbol{x}_1]$ und X_2 einen Wert in $[\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2 + \Delta\boldsymbol{x}_2]$ usw. annehmen.

Definition 2.4 *Ein stochastischer Prozeß $(\Omega, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t\in I})$ mit $I = [t_0, \infty)$ heißt stationär, wenn seine endlich-dimensionalen Verteilungen invariant gegenüber Zeitverschiebungen sind, d. h. wenn für je endlich viele Zeitpunkte $t_1 < \cdots < t_n$ und jedes $t \geq 0$ gilt:*

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = F_{t_1+t,\ldots,t_n+t}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \quad .$$

Offensichtlich sind bei einem stationären Prozeß im Falle von deren Existenz die Erwartungswertfunktion $\mathrm{E}(t) := \mathrm{E}(X(t))$ konstant und die Covarianzfunktion $\mathrm{Cov}(s,t) := \mathrm{Cov}(X(s), X(t))$ nur von der Zeitdifferenz $t - s$ abhängig.

Für das System der endlich-dimensionalen Verteilungen $(P_J)_{J\in\mathcal{H}(I)}$ eines Prozesses gilt offensichtlich: Sind J und H nichtleere Teilmengen von I mit $J \subset H$ und $p_J^H \colon E^H \to E^J$ die restringierende Projektionsabbildung von $(E^H, \mathcal{A}'^H)$ auf $(E^J, \mathcal{A}'^J)$, so gilt wegen $X_J = p_J^H \circ X_H$, wobei $X_J := \bigotimes_{t\in J} X_t \quad (J \subset I)$:

$$P_J = p_J^H(P_H) \qquad . \tag{2.4}$$

Diese Projektivität der Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen kann überführt werden in die Angabe der beiden folgenden *Konsistenz*-Bedingungen:

- *Symmetrie*:

$$P_{t_1,\ldots,t_m}(A_1 \times \cdots \times A_m) = P_{t_{k_1},\ldots,t_{k_m}}(A_{k_1} \times \cdots \times A_{k_m}) \tag{2.5}$$

  für jede Permutation $(k_1, \ldots, k_m)$ von $(1, \ldots, m)$, jedes $m \in \mathbb{N}$, alle $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset I$ und alle $A_i \in \mathcal{A}' \quad (i = 1, \ldots, m)$.

- *Verträglichkeit*:

$$P_{t_1,\dots,t_m}(A_1 \times \cdots \times A_m) \;=\; P_{t_1,\dots,t_m,t_{m+1},\dots,t_{m+\tilde{m}}}(A_1 \times \cdots \times A_m \times \underbrace{\times\, E \times \cdots \times E}_{\tilde{m}\text{ Faktoren}}) \tag{2.6}$$

für jedes $m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, alle $\{t_1, \dots, t_{m+\tilde{m}}\} \subset I$ und alle $A_i \in \mathcal{A}'$ $(i = 1, \dots, m)$.[6]

Wesentlich für den weiteren Verlauf unserer physikalischen Problemmodellierung ist, daß in Umkehrung obiger Situation aus der Vorgabe einer beliebigen Familie projektiver Maße (2.4) über einem Meßraum ein stochastischer Prozeß mit diesen endlich-dimensionalen Verteilungen auf einem geeigneten W-Raum konstruiert werden kann:

Satz 2.5 (Fundamentalsatz von Kolmogorov) *Sei I eine nichtleere Menge und $(P_J)_{J\in\mathcal{H}(I)}$ eine Familie von W-Maßen auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, welche die Konsistenzbedingungen (2.5)–(2.6) erfüllt. Dann existiert genau ein W-Maß P_I auf $\big((\mathbb{R}^n)^I, (\mathcal{B}^n)^I\big)$ mit $p_J(P_I) = P_J$ für alle $J \in \mathcal{H}(I)$. Ferner existiert ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und darauf ein stochastischer Prozeß $(X_t)_{t\in I}$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ derart, daß $(P_J)_{J\in\mathcal{H}(I)}$ die Familie seiner endlich-dimensionalen Verteilungen ist.*[7]

Zur Familie $(P_J)_{J\in\mathcal{H}(I)}$ kann als zugehöriger, bis auf stochastische Äquivalenz* eindeutiger *kanonischer* Prozeß stets gewählt werden:

$$(\Omega, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t\in I}) = \big((\mathbb{R}^n)^I, (\mathcal{B}^n)^I, P_I, (\omega(t))_{t\in I}\big) \quad ; \tag{2.7}$$

dabei sind: $X_t(\omega) := p_{\{t\}}(\omega) = \omega(t)$ für alle $t \in I$ und $\omega \in \Omega$, d. h. die Realisierungen fallen mit den Elementarereignissen zusammen; $(\mathbb{R}^n)^I$ die Menge der $\mathbb{R}^n$-wertigen Funktionen $\omega(\cdot)$ auf I; $(\mathcal{B}^n)^I$ die von den Zylindermengen erzeugte Produkt-σ-Algebra; P_I der sog. projektive Limes der Verteilungen

$$\begin{aligned} P_I(A) \;&:=\; P_I\left(\{\omega \in \Omega \,|\, \omega(t_1) \in B_1, \dots, \omega(t_m) \in B_m\}\right) \\ &:=\; P_{t_1,\dots,t_m}(B_1 \times \cdots \times B_m) \quad , \end{aligned}$$

[6] Entsprechend gilt neben der Symmetriebedingung für Wahrscheinlichkeitsdichten:

$$\int p_m(\dots; t_{i-1}, \boldsymbol{x}_{i-1}; t_i, \boldsymbol{x}_i; t_{i+1}, \boldsymbol{x}_{i+1}; \dots)\, d\boldsymbol{x}_i = p_{m-1}(\dots; t_{i-1}, \boldsymbol{x}_{i-1}; t_{i+1}, \boldsymbol{x}_{i+1}; \dots)\ .$$

[7] Für den Beweis und die nachfolgenden Bemerkungen s. [Bauer 91] § 35 . Allgemein gilt der Satz für Produkte polnischer Räume E, d. h. topologischer Räume mit (die Topologie definierender) vollständiger Metrik und abzählbarer Basis; in unserem Zusammenhang wird lediglich die spezielle Situation $E = \mathbb{R}^n$ mit der σ-Algebra seiner Borelmengen benötigt.

wobei A die Zylindermenge mit den einschränkenden Mengen $B_1, \ldots, B_m$ im Sinne von (2.3) ist. Nach dem Eindeutigkeits- und Fortsetzungssatz für Maße[8] läßt sich P dann eindeutig fortsetzen auf ganz $\mathcal{A}$.

Auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist für unsere physikalischen Anforderungen das Konzept der elementaren bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A \,|\, B)$ eines Ereignisses $A \in \mathcal{A}$ unter der Bedingung $B \in \mathcal{A}$,

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)} \quad , \text{ mit } P(B) > 0 \quad ,$$

insbesondere für eine Familie von Bedingungen zu erweitern, von denen jede einzelne den Wert 0 haben kann. Sind $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsgröße, d. h. $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, und $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ also eine Vergröberung des Ausgangsversuches, so ist X i. a. nicht mehr $\mathcal{C}$-meßbar. Es existiert jedoch eine P-fast sicher eindeutig festgelegte, integrierbare $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsgröße Y auf Ω, welche $\mathcal{C}$-meßbar ist und für die gilt:

$$\int_C Y \, dP = \int_C X \, dP \qquad \text{für alle } C \in \mathcal{C} \quad .^9$$

$\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{C}) := Y$ wird als *bedingter Erwartungswert** von X unter der Bedingung bzw. Hypothese $\mathcal{C}$ bezeichnet. Ist $\mathcal{C}$ von einer Zufallsgröße Z erzeugt, so sei $\mathrm{E}(X \,|\, Z) := \mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{C})$.

Definition 2.6 *Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und $\chi_{(\cdot)}$ die charakteristische Funktion. Dann heißt $P(A \,|\, \mathcal{C}) := \mathrm{E}(\chi_A \,|\, \mathcal{C})$ bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung $\mathcal{C}$. Für den Fall der Erzeugung von $\mathcal{C}$ durch eine Zufallsgröße Z auf diesem W-Raum ist $P(A \,|\, Z) := P(A \,|\, \mathcal{C})$.*

Satz 2.7 *Es seien $X \colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ eine Zufallsvariable, $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und $P(X \in B \,|\, \mathcal{C}) := P(\{\omega \,;\, X(\omega) \in B\} \,|\, \mathcal{C})$ $(B \in \mathcal{B}^n)$. Dann existiert eine Funktion $\hat{P} \colon \Omega \times \mathcal{B}^n \to [0,1]$, für die gilt:*

1. *für jedes $\omega \in \Omega$ ist $\hat{P}(\omega, \cdot)$ ein W-Maß auf $\mathcal{B}^n$;*
2. *für jedes $B \in \mathcal{B}^n$ ist $\hat{P}(\cdot, B)$ eine Version von $P(X \in B \,|\, \mathcal{C})$, d. h.:*
   (a) *$\hat{P}(\omega, \cdot)$ ist $\mathcal{C}$-meßbar,*
   (b) *$\hat{P}(\omega, B) = P(X \in B \,|\, \mathcal{C})(\omega)$.*

[8] [Bauer 92] § 5 .
[9] Zum Beweis s. [Bauer 91] Satz 15.1 .

$\hat{P}$ ist bis auf eine von B abhängige Nullmenge in $\mathcal{C}$ eindeutig bestimmt.[10]

$\hat{P}$ heißt *bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung* von X bei gegebenem $\mathcal{C}$.

Lemma 2.8 *Der bedingte Erwartungswert $\mathrm{E}(X \mid Y)$ von X bzgl. einer Zufallsgröße $Y\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ist eine $\mathcal{B}^n$-meßbare Funktion von Y, d. h. es existiert eine $\mathcal{B}^n$-meßbare Abbildung $g\colon (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \to \mathbb{R}^n$, für die gilt:*

$$\mathrm{E}(X \mid Y)(\cdot) = g(Y(\cdot)) \quad .$$

g ist dabei bis auf eine Nullmenge von Bildwerten von Y eindeutig bestimmt.[11]

Man setzt daher:

$$\mathrm{E}(X \mid Y = \boldsymbol{y}) := g(\boldsymbol{y}) \quad .$$

Definition 2.9 *Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $Y\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ Zufallsgröße und $A \in \mathcal{A}$; dann heißt*

$$P(A \mid Y = \boldsymbol{y}) := \mathrm{E}(\chi_A \mid Y = \boldsymbol{y})$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Hypothese $Y = \boldsymbol{y}$.

Für eine bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X \in B \mid Y)$ und eine zugehörige bedingte Verteilung $\hat{P}(\omega,B)$ existiert eine fast sicher eindeutig bestimmte $\mathcal{B}^n$-meßbare Abbildung $\bar{Q}\colon (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \times \mathcal{B}^n \to [0,1]$ mit

$$\bar{Q}(Y(\omega),B) = \hat{P}(\omega,B) \quad .$$

Ferner erhalten wir $\bar{Q}(\boldsymbol{y},B) = P(X \in B \mid Y = \boldsymbol{y})$ und interpretieren, daß $\bar{Q}(\boldsymbol{y},B)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in B\}$ unter der Bedingung $Y = \boldsymbol{y}$ ist.

Definition 2.10 *Hat $\bar{Q}(\boldsymbol{y},\cdot) = P(X \in \cdot \mid Y = \boldsymbol{y})$ eine Dichte $\bar{q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ in $\mathbb{R}^n$, so heißt $\bar{q}$ bedingte Dichte von X unter der Bedingung $Y = \boldsymbol{y}$.*

Lemma 2.11 *Seien X eine $\mathbb{R}^n$-wertige und Y eine $\mathbb{R}^m$-wertige Zufallsgröße, deren gemeinsame Verteilung auf $(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{B}^{n+m})$ eine Dichte $f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ besitze, und sei $f_1(\boldsymbol{y})$ die Dichte der Verteilung von Y, mit $f_1 > 0$ fast überall (bzgl. des Verteilungsmaßes von X). Dann besitzt $P(X \in B \mid Y = \boldsymbol{y})$ eine bedingte Dichte $\bar{q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ der Gestalt*

$$\bar{q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{f_1(\boldsymbol{y})} & \text{für alle } \boldsymbol{y} \text{ mit } f_1(\boldsymbol{y}) > 0 \\ \text{beliebige Dichte} & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad .[12]$$

[10] Beweis s. [Bellach et al. 78] Kap. 3.7 .
[11] Beweis s. [Bellach et al. 78] Kap. 3.3 , Satz 2 .
[12] Beweis s. [Bellach et al. 78] Kap. 3.4 .

Mithilfe bedingter Dichten lassen sich stochastische Größen direkt berechnen; insbesondere gilt (fast sicher):[13]

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X\,|\,Y) &= \int \boldsymbol{x}\bar{q}(\boldsymbol{x},Y)\,d\boldsymbol{x} = \frac{1}{f_1(Y)}\int \boldsymbol{x} f_2(\boldsymbol{x},Y)\,d\boldsymbol{x} \quad , \\
\mathrm{E}(X\,|\,Y=\boldsymbol{y}) &= \int \boldsymbol{x}\bar{q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x} = \frac{1}{f_1(\boldsymbol{y})}\int \boldsymbol{x} f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x} \quad , \\
P(A\,|\,Y=\boldsymbol{y}) &= \int \chi_A\,\bar{q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x} = \frac{1}{f_1(\boldsymbol{y})}\int\limits_A f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x} \quad ,
\end{aligned}$$

mit

$$f_1(\boldsymbol{y}) = \int f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x} \quad .$$

2.2 Formulierung der Physik in stochastischen Prozessen

Ein zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Orte $r = R_s$ befindliches Gasvolumenelement des stellaren Windes bewegt sich im vorausgesetzten Windmodell mit der Geschwindigkeit v in radialer Richtung. Im mitbewegten System, in dessen Ursprung der Mittelpunkt des Gaselementes ruht, wird jede Feldgröße X – im externen ortsfesten Beobachtersystem: $X = X(r,t)$ – beschrieben durch

$$X(t) := X(R_s,t) \qquad ,$$

was den X-Zustand zum Zeitpunkt t eines Gaselementes bezeichnet, das sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Orte R_s befand. $\frac{d}{dt}$ ist dementsprechend die totale Ableitung entlang des Flusses.

Aufgrund der turbulenten Verhältnisse der Sternatmosphäre gilt für die Temperatur nicht mehr ein deterministischer Zusammenhang, wie z. B. (1.4). Vielmehr ist davon auszugehen, daß der deterministische Verlauf von einem turbulenten Anteil $T(t)$ gestört ist, der die aktuelle 'Temperaturabweichung' durch Fluktuation beschreibt:

$$\bar{T}(t) + T(t) \quad . \tag{2.8}$$

Mithin ist bei Betrachtung einer Vielzahl physikalisch gleichartiger Gaselemente des stellaren Windes eine statistische Häufigkeitsverteilung von Temperatur(abweichungs)werten gegeben.

[13] Beweis s. [Bauer 91] § 15 ; [Bellach et al. 78] Kap. 3.4 .

Demnach wird eine wahrscheinlichkeitstheoretische Problemformulierung nahegelegt, in der eine Temperaturabweichungsbestimmung Θ zum Zeitpunkt $\hat{t}$ an einem Gaselement, welches zu $\hat{t}$ die zufällige Temperaturabweichung $\hat{T}$ besitzt, gerade (unter Absehung aller Meßfehler) $\hat{T}$ ergibt:

$$\Theta_{\hat{t}}(\hat{T}) = \hat{T} \qquad .$$

$\Theta_{\hat{t}}$ hat also den Charakter einer Zufallsvariablen. Da in unserer Situation die Temperaturverteilungen zu *jedem* Zeitpunkt $t \geq t_0$ relevant sind, erhalten wir auf diese Weise anstelle eines deterministischen Temperaturverlaufes nunmehr einen stochastischen Fluktuationstemperaturprozeß: $\{\Theta_t \,; t \in \mathbb{R}_0^+\}$.

Da Staubbildung- und -wachstum im stellaren Wind signifikant temperaturabhängig sind, haben auch die Momente $K_0, \ldots, K_3$ keinen deterministischen zeitlichen Verlauf, sondern probabilistischen Charakter. Sind die endlich-dimensionalen Verteilungen bekannt, so ist durch den Fundamentalsatz von Kolmogorov (2.5) der stochastische Prozeß – kanonisch wie in (2.7) konstruiert – konkret gegeben:

$$(\Omega, \mathcal{A}, P, X_t) = \left(\left(\mathbb{R}^5\right)^{[0,\infty)}, \left(\mathcal{B}^5\right)^{[0,\infty)}, P, (\Theta, \mathcal{K})_t \right) \qquad , \qquad (2.9)$$

wobei der stochastische Prozeß $\{(\Theta,\mathcal{K})_t \,; t \in \mathbb{R}_0^+\}$ mit seinen Pfaden mögliche gemeinsame Verläufe von Temperatur und Staubbildung beschreibt:

$$(\Theta, \mathcal{K})_t(T,\boldsymbol{K}) = (T,\boldsymbol{K})(t) = (T, K_0, K_1, K_2, K_3)(t) \qquad .$$

Im Weiteren gilt es, die endlich-dimensionalen Verteilungen, die die Konstruktion von $(\Theta, \mathcal{K})_t$ ermöglichen, für die gegebene astrophysikalische Situation auf theoretischem Wege zu bestimmen.

In einem ersten Schritt werden wir den stochastischen Prozeß $(\Theta, \mathcal{K})_t$ spezieller qualifizieren und betrachten dazu vorbereitend:

Definition 2.12 *Ein stochastischer Prozeß $\{X_t \,; t \in \mathbb{R}_0^+\}$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt Markov-Prozeß, wenn für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_0^+$ mit $t_1 \leq t_2$ und alle $B \in \mathcal{B}^n$ P-fast sicher gilt:*

$$P(X_{t_2} \in B \,|\, \mathcal{A}([0,t_1])) = P(X_{t_2} \in B \,|\, X_{t_1}) \qquad . \qquad (2.10)$$

Da eine Unter-σ-Algebra $\mathcal{A}([t_1,t_2]) = \mathcal{A}(X_t \,, t_1 \leq t \leq t_2)$ diejenigen Ereignisse enthält, die ausschließlich durch Bedingungen an den Prozeßverlauf im Zeitintervall $[t_1,t_2]$ festgelegt sind, charakterisiert $\mathcal{A}([t_1,t_2])$ die Geschichte des Prozesses während $[t_1,t_2]$. Die Markoveigenschaft (2.10) besagt daher, daß für den Prozeßzustand eines Systems zum Zeitpunkt t_2 die Information über die vergangene Entwicklung des Prozesses bis zur Zeit t_1 gleichwertig ist mit der Information über den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t_1. Der physikalische Prozeß ist in diesem Sinne "ohne Gedächtnis",[14] i. e.

[14] Vgl. Satz (A.9).

bei bekannter Gegenwart t_1 sind Vergangenheit und Zukunft bei Markov-Prozessen statistisch unabhängig* voneinander. Wir treffen nun für unser physikalisches Problem die

Voraussetzung: Der stochastische Prozeß $\{(\Theta, \mathcal{K})_t; t \in \mathbb{R}_0^+\}$ ist ein Markov-Prozeß.

Diese Voraussetzung und die damit gegebene erhebliche konzeptionelle, mathematische Vereinfachung in der weiteren Behandlung ist physikalisch gerechtfertigt, insofern die Unabhängigkeit der Temperaturfluktuation und des Staubwachstums von früheren Temperaturfluktuationen und der bisherigen Genese des Staubkorns plausibel ist: In der Tat werden die späteren Betrachtungen des Temperaturanteils des Prozesses die Markoveigenschaft in Hinsicht auf die Temperaturfluktuationen liefern (s. S. 36). Ferner folgt der deterministische Fall von Staubbildung und -wachstum einem Differentialgleichungssystem *erster* Ordnung (vgl. (1.1)); Markov-Prozesse stellen jedoch gerade die stochastische Verallgemeinerung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(t,\boldsymbol{x}(t))$$

dar, bei denen die Veränderung des beschriebenen Systems zur Zeit t offensichtlich nur vom Zustand $\boldsymbol{x}(t)$ zur Zeit t und nicht von früheren Zuständen $\boldsymbol{x}(s),\ s < t$ abhängt.

Die Markoveigenschaft des stochastischen Prozesses $(\Theta,\mathcal{K})_t$ eröffnet einen Weg zur Konstruktion dieses Prozesses in unserem physikalischen Problemzusammenhang, da bei Markov-Prozessen die endlich-dimensionalen Verteilungen durch Angabe von Start- und Übergangswahrscheinlichkeit festgelegt sind. Insbesondere nämlich gilt die Chapman-Kolmogorov-Gleichung (bzw. Einstein-Smoluchowski-Gleichung):

Lemma 2.13 *Ist $\{X_t\,; t \in \mathbb{R}_0^+\}$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ein Markov-Prozeß auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so existiert zur bedingten Wahrscheinlichkeit $P(X_{t_2} \in B \,|\, X_{t_1})$ eine bedingte Verteilung $Q(X_{t_1},B)$. Mit $P(t_1, X_{t_1}, t_2, B) := Q(X_{t_1},B)$ gilt für die Abbildung $P(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, B)$ (, wobei $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_0^+$ mit $t_1 \le t_2$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und $B \in \mathcal{B}^n$):*[15]

a. *für gegebenes t_1 (mit $t_1 \le t_2$) und gegebenes $B \in \mathcal{B}^n$ ist $P(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, B) = P(X_{t_2} \in B \,|\, X_{t_1})$ fast sicher;*

b. *$P(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, \cdot)$ ist ein W-Maß auf $\mathcal{B}^n$;*

c. *$P(t_1, \cdot, t_2, B)$ ist $\mathcal{B}^n$-meßbar;*

[15] Beweis s. [Arnold 73] Kap. 2.2.

d. für alle $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2, B \in \mathcal{B}^n$ *und* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *gilt bis auf eine Menge* $N \subset \mathbb{R}^n$ *mit* $P(\omega \in \Omega; X_{t_1}(\omega) \in N)$ *die* Chapman-Kolmogorov-Gleichung*:*

$$P(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, B) = \int_{\mathbb{R}^n} P(t, \boldsymbol{y}, t_2, B) P(t_1, \boldsymbol{x}, t, d\boldsymbol{y}) \quad . \tag{2.11}$$

Im weiteren sei o. B. d. A. $P(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, B)$ stets so gewählt, daß (2.11) für *alle* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt sowie

e. $P(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, B) = \chi_B = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in B \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin B \end{cases}$ für *alle* $t_1 \in \mathbb{R}_0^+$.

Definition 2.14 *Eine Abbildung* $P(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, B)$ *mit den o.a. Eigenschaften (a)–(e) heißt Übergangswahrscheinlichkeit des Markov-Prozesses* $\{X_t; t \in \mathbb{R}_0^+\}$*. Sie heißt stationär, wenn für alle* $t \geq 0$ *gilt:*

$$P(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, B) = P(t_1 + t, \boldsymbol{x}, t_2 + t, B) =: P(t_2 - t_1, \boldsymbol{x}, B) \quad .$$

$P(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, B) =: P(X_{t_2} \in B \,|\, X_{t_1} = \boldsymbol{x})$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß sich der Prozeß zur Zeit t_2 in B befindet, wenn er zur früheren Zeit t_1 im Zustand $\boldsymbol{x}$ war. Bei gegebener Anfangsverteilung $P_{t_0=0}$ von X_0 liefert nun die Übergangswahrscheinlichkeit die endlich-dimensionalen Verteilungen, mithin die stochastischen Informationen über den Markov-Prozeß:

Satz 2.15 *Sei* $P(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, B)$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften (a)–(e). Dann existiert zu jeder Verteilung* $P_{t_0=0}$ *auf* $\mathcal{B}^n$ *ein W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *und darauf ein Markov-Prozeß* $\{X_t; t \in \mathbb{R}_0^+\}$ *mit Zustandsraum* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$*, dessen Übergangswahrscheinlichkeit* $P(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, B)$ *ist und der die Startverteilung* $P_{t_0=0}$ *besitzt.*[16]

Für den stochastischen Prozeß von Staubbildung und -wachstum bei fluktuierenden Temperaturen wird daher aufgrund physikalischer Überlegungen zum Ansatz der Übergangswahrscheinlichkeit die Verteilung P_1 bzw. deren Dichte zu berechnen sein, woraus sich insbesondere die Erwartungwerte der Staubbildung ergeben.

Besitzt die Übergangswahrscheinlichkeit eine Dichte $p(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, \boldsymbol{y})$, so geht mit der Markoveigenschaft (A.9), formuliert mit den Dichten der endlich-dimensionalen Verteilungen

$$\begin{aligned} \frac{p_m(t_1, \boldsymbol{x}_1; \ldots; t_m, \boldsymbol{x}_m)}{p_{m-1}(t_1, \boldsymbol{x}_1; \ldots; t_{m-1}, \boldsymbol{x}_{m-1})} &= p(t_m, \boldsymbol{x}_m \,|\, t_1, \boldsymbol{x}_1; \ldots; t_{m-1}, \boldsymbol{x}_{m-1}) \\ &= p(t_{m-1}, \boldsymbol{x}_{m-1}, t_m, \boldsymbol{x}_m) \quad , \end{aligned}$$

[16] S. auch Anhang A, Konstruktion eines Markov-Prozesses*.

die Chapman-Kolomogorov-Gleichung (2.11) über in

$$p(t_1, \boldsymbol{x}, t_2, \boldsymbol{y}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(t_1, \boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{z}) p(t, \boldsymbol{z}, t_2, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{z} \qquad ,$$

für alle $0 \leq t_1 < t < t_2$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$. Durch Multiplikation mit $p_1(t_1,\boldsymbol{x})$ und Integration bezüglich $\boldsymbol{x}$ ergibt sich

$$p_1(t_2,\boldsymbol{y}) = \int p_1(t,\boldsymbol{z}) p(t, \boldsymbol{z}, t_2, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{z} \qquad . \tag{2.12}$$

2.3 Fokker-Planck-Gleichung

Die gesuchten Erwartungswerte der Staubbildungsmomente in dem stellaren Wind können berechnet werden, wenn die probabilistische Formulierung der physikalischen Problemsituation zu einer Gleichung führt, als deren Lösung sich die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_1(t, T, \boldsymbol{K})$ ergibt, zu einer Zeit t die Temperaturabweichung T und die Staubbildung $\boldsymbol{K}$anzutreffen.

Für die Dichte $p(t, T, \boldsymbol{K}, t + \Delta t, T + \Delta T, \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K})$ der Übergangswahrscheinlichkeit des Markov-Prozesses $X_t = (\Theta,\mathcal{K})_t$ setzen wir physikalisch im Temperaturturbulenzfeld begründet voraus, daß in kleinsten Zeitspannen beliebig große Fluktuationen der stochastischen Größen unwahrscheinlich sind; genauer gelte für jedes $\delta > 0$ bei gegebenem Zustand $(T,\boldsymbol{K})$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \iint\limits_{\|(\Delta T, \Delta \boldsymbol{K})\| > \delta} p(t, T, \boldsymbol{K}, t + \Delta t, T + \Delta T, \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K})\, d\Delta T\, d^4\Delta \boldsymbol{K} = 0 \quad . \tag{2.13}$$

Es seien die folgenden Schreibweisen für die infinitesimalen, z. T. gemischten Erwartungswerte und Varianzen der Veränderung von X_t für $\mu, \nu = 0, \ldots, 3$ und $\delta > 0$ definiert:

$$B_T(t, T, \boldsymbol{K}) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \iint\limits_{\|(\Delta T, \Delta \boldsymbol{K})\| < \delta} \Delta T\, p(t, T, \boldsymbol{K}, t + \Delta t, T + \Delta T, \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K})\, d\Delta T\, d^4\Delta \boldsymbol{K} \tag{2.14}$$

$$B^{\mu}_{\boldsymbol{K}}(t, T, \boldsymbol{K}) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \iint\limits_{\|(\Delta T, \Delta \boldsymbol{K})\| < \delta} \Delta \boldsymbol{K}_{\mu}\, p(t, T, \boldsymbol{K}, t + \Delta t, T + \Delta T, \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K})\, d\Delta T\, d^4\Delta \boldsymbol{K} \tag{2.15}$$

$$A_T(t,T,\boldsymbol{K}) := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\iint\limits_{\|(\Delta T,\Delta\boldsymbol{K})\|<\delta}(\Delta T)^2\,p(t,T,\boldsymbol{K},$$

$$t+\Delta t,T+\Delta T,\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\,d\Delta T\,d^4\Delta\boldsymbol{K} \quad (2.16)$$

$$A^{\mu\nu}_{\boldsymbol{K}}(t,T,\boldsymbol{K}) := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\iint\limits_{\|(\Delta T,\Delta\boldsymbol{K})\|<\delta}\Delta\boldsymbol{K}_\mu\boldsymbol{K}_\nu\,p(t,T,\boldsymbol{K},$$

$$t+\Delta t,T+\Delta T,\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\,d\Delta T\,d^4\Delta\boldsymbol{K} \quad (2.17)$$

$$A^{\mu}_{T\boldsymbol{K}}(t,T,\boldsymbol{K}) := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\iint\limits_{\|(\Delta T,\Delta\boldsymbol{K})\|<\delta}\Delta\boldsymbol{K}_\mu\Delta T\,p(t,T,\boldsymbol{K},$$

$$t+\Delta t,T+\Delta T,\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\,d\Delta T\,d^4\Delta\boldsymbol{K} \quad (2.18)$$

Wir *setzen* nunmehr *voraus* , daß die abgeschnittenen Momente (2.14)–(2.18) existieren und unabhängig von δ sind.

Unter der Regularitätsannahme der Existenz und Stetigkeit der unten in (2.19) auftretenden partiellen Ableitungen kann damit ausgehend von der Chapman-Kolmogorov-Gleichung (2.12) für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_1(t,T,\boldsymbol{K})$ eine sog. *Fokker-Planck-Gleichung* hergeleitet werden:[17]

$$\frac{\partial\,p_1(t,T,\boldsymbol{K})}{\partial t} =$$

$$-\frac{\partial\left(p_1(t,T,\boldsymbol{K})B_T(t,T,\boldsymbol{K})\right)}{\partial T}-\frac{\partial\left(p_1(t,T,\boldsymbol{K})B^{\mu}_{\boldsymbol{K}}(t,T,\boldsymbol{K})\right)}{\partial K_\mu}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(p_1(t,T,\boldsymbol{K})A_T(t,T,\boldsymbol{K})\right)}{\partial T^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(p_1(t,T,\boldsymbol{K})A^{\mu\nu}_{\boldsymbol{K}}(t,T,\boldsymbol{K})\right)}{\partial K_\mu\,\partial K_\nu}$$

$$+\frac{\partial^2\left(p_1(t,T,\boldsymbol{K})A^{\mu}_{T\boldsymbol{K}}(t,T,\boldsymbol{K})\right)}{\partial K_\mu\,\partial T} \quad .$$

Dabei gilt als Summenkonvention, daß über zwei gleiche griechische Indizes

[17] Zur Herleitung s. die auf der Publikation [Kolmogorov 31] basierende Darstellung [Bharucha-Reid 60]. Vgl. auch die umfassende Untersuchung [Risken 89]. Insbesondere im Kontext von Diffusionsproblemen wird (2.19) oft auch Vorwärts-Kolmogorov-Gleichung genannt.

summiert wird $(0, \ldots, 3)$; kurz:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial (p_1 B_T)}{\partial T} - \frac{\partial (p_1 B^{\mu}_{\boldsymbol{K}})}{\partial K_\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (p_1 A_T)}{\partial T^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (p_1 A^{\mu\nu}_{\boldsymbol{K}})}{\partial K_\mu \partial K_\nu} + \frac{\partial^2 (p_1 A^{\mu}_{T\boldsymbol{K}})}{\partial K_\mu \partial T} \quad . \tag{2.19}$$

Mit Erhalt der Fokker-Planck-Gleichung ist zunächst das mathematische Teilziel erreicht, eine Gleichung zur Bestimmung der Ein-Punkt-Wahrscheinlichkeitsdichte p_1 aufzustellen. Im weiteren Verlauf gilt es nun, durch geeignete physikalische Überlegungen die Koeffizientenfunktionen konkret zu bestimmen, d. h. die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte des stochastischen Prozesses für unsere physikalische Problemsituation der Staubbildung unter turbulenten Temperaturbedingungen zu ermitteln.

Kapitel 3

Übergangswahrscheinlichkeiten

Für die weitere Behandlung des Problems gilt es, einen physikalisch begründeten Ansatz der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses vorzunehmen. Hierzu sei in einem ersten Schritt die vereinfachende Annahme getroffen, daß Bildung und Wachstum von Staub nicht auf die Physik der Temperaturfluktuationen zurückwirkt. Während einerseits Staubbildung und -wachstum offensichtlich auch in der stochastischen Situation genuin temperaturabhängig bleiben, wird also in unserem Modell andererseits vorausgesetzt, daß die Statistik der Temperaturfluktuationen nicht beeinflußt wird durch das Vorhandensein der Kohlenstoffcluster. Dies ist in erster Näherung insofern gerechtfertigt, als die Ursache der Turbulenz in den Wellenfeldern des stellaren Windes gesehen werden kann, die zunächst unabhängig vom Staub auftreten. Deren Modulation bleibt dann jedoch unberücksichtigt. Wir treffen daher die

Voraussetzung: Die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte des stochastischen Prozesses $X_t = \{(\Theta, \mathcal{K})_t \,; t \in \mathbb{R}_0^+\}$ läßt sich zu jeder Zeit t darstellen in der Form

$$p(t, T, \boldsymbol{K}, t + \Delta t, T + \Delta T, \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K}) =$$

$$p_T(t, T, t + \Delta t, T + \Delta T) \cdot p_K(t, T, \boldsymbol{K}, t + \Delta t, \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K}) \quad , \quad (3.1)$$

mit geeigneten Übergangswahrscheinlichkeitsdichten p_T und p_K .

Hierbei ist festzuhalten, daß (i) p_T aufgrund unserer Separationsannahme unabhängig von $\boldsymbol{K}$ ist; daß (ii) die Wahrscheinlichkeitsdichte p_K für den Übergang von $\boldsymbol{K}$ nach $\boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K}$ von der Fluktuationstemperatur T zum Ausgangszeitpunkt t, gemäß des Differentialgleichungssystems (1.2) und der daraus resultierenden Voraussetzung der Markoveigenschaft jedoch nicht

von der Temperatur beim erreichten Zustand zur Zeit $t + \Delta t$ abhängt; und daß (iii) die Produktbildung die angenommene stochastische Unabhängigkeit voneinander formuliert.[1]

Im nächsten Schritt (Kap. 3.1 & 3.2) sind nunmehr die separierten Übergangswahrscheinlichkeitsdichten p_T und p_K anzusetzen.

3.1 Stochastik der Temperaturfluktuation

Die radiale Temperaturverteilung des stellaren Windes wird in unserem Modell, wie in Turbulenztheorien oft üblich ('Reynolds-Aufspaltung') angesetzt als Summe zweier Komponenten: (i) erster Anteil ist der deterministische Temperaturverlauf $\bar{T}$, wie im nicht-turbulenten Windmodell z. B. durch (1.4) oder andere physikalisch begründete Verläufe[2] gegeben; (ii) hinzu kommt ein fluktuierender Temperaturanteil $\Theta(t)$, der eine stochastische Abweichung vom deterministischen Wert beschreibt.

Die Komponente der fluktuierenden Temperaturabweichung, gemäß der Faktorisierungsvoraussetzung (3.1) von der Staubbildung unabhängig, kann in unserem stochastischen Prozeß interpretiert werden als Resultat zweier Einflüsse:

- Auf ein kleines Gasvolumen mit der Fluktuationstemperatur Θ wirkt durch Stoßwechselwirkung der Partikel mit der Umgebung eine Kraft systematisch auf einen Temperaturausgleich, d. h. auf ein Verschwinden von Θ hin, beschrieben durch einen Term der Form

$$-\frac{1}{\lambda}\Theta \qquad (\lambda > 0 \text{ geeignet}). \tag{3.2}$$

  Wird die Temperatur des Gaselementes etwa durch Einwirkung einer Stoßwelle (adiabatisch) verändert, so findet hiernach ein Relaxationsprozeß hin zum Zustand des Gleichgewichtes mit der Umgebung statt, bei dem die Geschwindigkeit für die Änderung von $\Theta(t) = T(t)$ nur als abhängig von T angenommen wird mit $\dot{\Theta}(0) = 0$. Der Term (3.2) kann dann verstanden werden als Ergebnis einer Entwicklung und Linearisierung der entsprechenden (makroskopischen) 'Bewegungsgleichung' für das Temperaturverhalten. Die Proportionalitätskonstante λ ist demzufolge interpretierbar als derjenige Parameter, der die Größenordnung der Relaxationszeit bestimmt.[3]

[1] Bereits [Gail et al. 74] zeigt die konzeptionellen Vereinfachungen, zu denen die Voraussetzung führt.

[2] Beispielsweise kann zumindest in diesem Mittelwert eine Anpassung angestrebt werden an den Umstand, daß es durch die gebildeten Kohlenstoffcluster zu Strahlungsabschattungseffekten kommt.

[3] Zu diesem bei Fluktuationsproblemen üblichen Vorgehen vgl. [Landau, Lifschitz 87] § 118 .

- Neben dem deterministischen Anteil (3.2) ist von einer zusätzlichen Komponente auszugehen, die die turbulente Temperaturfluktuation enthält. Dieser Einfluß werde beschrieben als eine stochastisch wirkende Fluktuationskraft, die als unabhängig von Θ angenommen wird, da bei uns insb. das die Fluktuation bedingende probabilistische Wellenfeld physikalisch nicht verursacht oder bedingt gedacht wird durch die am Orte der Staubbildung herrschende aktuelle Temperaturabweichung T; diese Fluktuationskraft werde zunächst formuliert als ein Term der Form

$$\tilde{\sigma}\Gamma(t) \qquad (\tilde{\sigma} > 0 \text{ geeignet}). \tag{3.3}$$

Zusammen erhält man somit:

$$\dot{\Theta}(t) = -\frac{1}{\lambda}\Theta(t) + \tilde{\sigma}\Gamma(t) \qquad , \tag{3.4}$$

mithin eine Gleichung vom Langevin'schen Typus.[4]

Die Bedingungen der physikalischen Situation sind nunmehr in den stochastischen Term (3.3) einzubringen. Dabei gehen wir von folgenden Charakteristika der Temperaturfluktuation aus:

a. Bezogen auf das zugrundeliegende statistische Ensemble sei

$$\mathrm{E}(\Gamma(t)) = 0 \quad ,$$

da erstens kein Grund für die Annahme eines resultierenden systematischen Einflusses von Γ besteht und zweitens nur bei dieser Annahme das Verhalten des Mittelwertes mit der deterministischen Beziehung übereinstimmt:

$$\mathrm{E}\left(\dot{\Theta}(t)\right) = -\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{E}(\Theta(t)) \qquad .$$

b. Aufgrund der turbulenten physikalischen Situation einer Vielzahl voneinander unabhängiger, sich zufällig überlagernder Schall- und Stoßwellen am betrachteten Orte kann die durch die Covarianz beschriebene Korrelation zweier Zufallsgrößen $\Gamma(t_1)$ und $\Gamma(t_2)$ für Zeitspannen $|t_2 - t_1|$, die größer sind als die für eine individuelle zufällige Temperaturänderung charakteristische Zeitdauer $\Delta\tau$, gleich Null gesetzt werden. Darüberhinaus können wir in den betrachteten physikalischen

[4] Die Langevin-Gleichung ist insbesondere als Gleichung für die Geschwindigkeiten von Teilchen bei der Brownschen Bewegung gut bekannt, wobei (3.2) in Form des Stokes'schen Reibungsgesetzes auftritt und $\tilde{\sigma}$ ein Vielfaches der Diffusionskonstanten ist.

Systemen von einer Relaxationszeit λ ausgehen, die sehr groß ist verglichen mit $\Delta\tau$.[5]

Im Sinne eines thermischen Rauschens am Ort der Staubbildung erzeuge die Fluktuationskraft $\tilde{\sigma}\Gamma(t)$ mithin einen *rein zufälligen** Prozeßablauf. Die sehr schnell fluktuierenden Einflüsse werden daher mathematisch idealisiert mithilfe einer Deltadistribution dargestellt:

$$\mathrm{Cov}\,(\tilde{\sigma}\Gamma(t_1),\tilde{\sigma}\Gamma(t_2)) = \tilde{\sigma}^2\delta(t_1 - t_2) \quad (\text{für alle } t_1, t_2 \in \mathbb{R}_0^+).$$

c. Behandeln wir $\Gamma(t)$ formal als stochastischen Prozeß, so fordern wir zu dessen Spezifizierung von den Zufallsgrößen $\Gamma(t_i)$ ($i \in \mathbb{N}$ beliebig), in den endlich-dimensionalen Verteilungen jeweils einer Gaußschen Verteilung* mit Erwartungswert Null zu gehorchen (– wegen der geforderten reinen Zufälligkeit und der Gaußeigenschaft reicht es, diese Bedingung an die Ein-Punkt-Verteilungen zu stellen). Diese Annahme führt nicht nur zu mathematischen Vorteilen, sondern stimmt auch sehr gut mit dem physikalischen Modell überein, demzufolge am betrachteten Ort eine Überlagerung vieler unabhängiger Einflüsse von Zufallsgrößen stattfindet, deren Wirkung in ihrer Summe gemäß dem Zentralen Grenzwertsatz näherungsweise normalverteilt ist.[6]

Offensichtlich kann es jedoch keinen stochastischen Prozeß im gewöhnlichen Sinne geben, der die gestellten Anforderungen erfüllt – so wäre etwa für einen solchen Gauß-Prozeß $\mathrm{Cov}(\Gamma(t),\Gamma(t)) = \infty$. Wir gehen daher zu verallgemeinerten stochastischen Prozessen über und betrachten zunächst deren mathematische Konzeption; in einem zweiten Schritt wird dann eine Spezifikation für unsere vorliegenden Bedingungen erfolgen.

Es bezeichne $\mathcal{D}(G)$ (G Gebiet in $\mathbb{R}$) den Raum $C_0^\infty(G)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger (supp) in G als vollständigen Raum, d. h. topologisiert mit der Festlegung, daß eine Folge (φ_k) in $C_0^\infty(G)$ genau dann gegen ein $\varphi \in C_0^\infty(G)$ konvergiert, wenn es ein Kompaktum K in G gibt mit $\mathrm{supp}\,\varphi_k \subset K$ ($k \in \mathbb{N}$) und

$$\sup_{x\in G} |D^\alpha\varphi_k(x) - D^\alpha\varphi(x)| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0\ .$$

Mit den stetigen linearen Funktionalen $\mathcal{D}(G) \to \mathbb{C}$, d. h. den Distributionen bzw. generalisierten Funktionen auf $\mathcal{D}(G)$, verallgemeinert man nun das Konzept der stochastischen Prozesse:[7]

[5] Ferner können wir von einer Korrelation *gleichzeitiger* Fluktuationen an verschiedenen Raumpunkten (also in verschiedenen Gaselementen) und mithin von einer Einbeziehung einer räumlichen Koordinate in diesem System absehen, da wegen einer Wärmeübertragung durch Stoßvorgänge eine solche Korrelationslänge in der Größenordnung zwischenatomarer bzw. -molekularer Abstände läge, die wir in typisch hydrodynamischer Nähring als vernachlässigbar klein ansehen. Gleichzeitige Fluktuationen in verschiedenen Gasvolumina sind statistisch unabhängig; vgl. auch [Landau, Lifschitz 92] § 88.

[6] S. [Bauer 91] § 28.

[7] Grundlegend ist hier [Gel'fand, Vilenkin 64] chapter III.

Definition 3.1 *1. Ein verallgemeinerter stochastischer Prozeß (bzw. eine generalisierte Zufallsfunktion bzw. eine zufällige Distribution) ist eine Abbildung $\varphi \to \Phi(\varphi)$ von $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ in die Familie der Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei gilt:*

(a) Das Funktional $\Phi(\cdot)(\omega)$ ist für P-fast jedes $\omega \in \Omega$ linear, d. h. für beliebige $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt mit Wahrscheinlichkeit 1:

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\Phi(\varphi) + \beta\Phi(\psi) \quad ;$$

(b) Φ ist stetig in folgendem Sinne: Sind $\left(\varphi_{k_j}\right)$ $(k = 1, \ldots, n)$ konvergente Folgen in $\mathcal{D}$ mit $\varphi_{k_j} \to \varphi_k$ $(j \to \infty)$, so konvergiert auch die Verteilung des Zufallsvektors $\left(\Phi\left(\varphi_{1_j}\right), \ldots, \Phi\left(\varphi_{n_j}\right)\right)$ gegen die Verteilung von $(\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n))$, d. h. sind F_j und F die zugehörigen Verteilungsfunktionen, so gilt für jede reelle, stetige und beschränkte Funktion g auf $\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x})\, dF_j(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x})\, dF(\boldsymbol{x}) \quad .$$

2. Für einen verallgemeinerten stochastischen Prozeß Φ heißen, sofern existent,

$$\mathrm{m}(\varphi) := \mathrm{E}(\Phi(\varphi)) \qquad (\varphi \in \mathcal{D})$$

Mittelwertfunktional und

$$\mathrm{Cov}(\varphi,\psi) := \mathrm{E}((\Phi(\varphi) - \mathrm{m}(\varphi))(\Phi(\psi) - \mathrm{m}(\psi))) \qquad (\varphi, \psi \in \mathcal{D})$$

Covarianzfunktional von Φ.

3. Ein verallgemeinerter stochastischer Prozeß Φ heißt Gaußsch, wenn für jede Wahl von linear unabhängigen Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N}$ beliebig) die Zufallsgröße $(\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n))$ normal verteilt ist.

Definition 3.2 *Ein verallgemeinerter Gaußscher stochastischer Prozeß $\Gamma(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \varphi = \varphi(t))$ heißt weißes Rauschen, wenn für Mittelwert- und Covarianzfunktional gilt:*

i. $m(\cdot)|_{\mathcal{D}} = 0$,

ii. $C_\Gamma(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(t)\, dt \qquad (\varphi, \psi \in \mathcal{D})$.

Das so gewonnene mathematische Werkzeug kann offenbar die gestellten Anforderungen einlösen: Neben dem offensichtlichen Zutreffen von (a) und (c) ist auch Bedingung (b) erfüllt:

$$\begin{aligned} C_\Gamma(\varphi,\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-s)\varphi(t)\psi(t)\,dt\,ds = \delta(t-s)[\varphi(t)\psi(t)] \quad (t,s\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Man erhält einen verallgemeinerten Gaußschen Prozeß, wenn man den Wiener-Prozeß* W_t als verallgemeinerten stochastischen Prozeß darstellt:

$$\mathcal{W}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) W_t\,dt \qquad (\varphi\in\mathcal{D}),$$

mit $W_t = 0$ für $t < 0$; mit (A.3) berechnet sich für Mittelwert- und Covarianzfunktional:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\mathcal{W}}(\varphi) &= -m_{\mathcal{W}}(\dot{\varphi}) \equiv 0\ , \\ \dot{C}_{\mathcal{W}}(\varphi,\psi) &= C_{\mathcal{W}}(\dot{\varphi},\dot{\psi}) = \int_0^{\infty} \varphi(t)\psi(t)\,dt\ . \end{aligned}$$

Auch im verallgemeinerten Fall sind Gaußsche Prozesse durch Mittelwert und Covarianz eindeutig bestimmt,[8] so daß sich das Gaußsche Weiße Rauschen als Distributionen-Ableitung des Modells der Brownschen Bewegung eines freien Teilchens erkennen läßt; in diesem Sinne ist die ursprüngliche Schreibweise als '$\Gamma(t)$' motiviert, und formal wird üblicherweise symbolisiert: $\Gamma(t) = \dot{W}_t$. Kurz sei die in diesem Ansatz involvierte Physik durch drei weitere Punkte charakterisiert:

- Das Gaußsche Rauschen ist in der Tat *weiß*, da es das Lebesgue-Maß als Spektralmaß und mithin eine auf $\mathbb{R}$ konstante Spektraldichte* besitzt, d. h. ein Auftreten aller Frequenzen mit derselben Intensität vorliegt.[9]

[8] [Gel'fand, Vilenkin 64] chap. III, § 2.

[9] Mit dem Satz von Wiener-Khintchine (s. [Risken 89] 2.4.3), demgemäß sich die Spektraldichte stationärer Prozesse als Fouriertransformierte der Korrelation ergibt, erhält man

$$S(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\tau}\,\delta(\tau)\,d\tau = 2\ .$$

- Das Weiße Rauschen ist ein *stationärer* verallgemeinerter Prozeß, da für eine beliebige Familie $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{D}$ die Zufallsgröße $(\Gamma(\varphi_1(t+h)), \ldots, \Gamma(\varphi_n(t+h)))$ für jedes $h \in \mathbb{R}$ wegen (ii) in Def. (3.2) dieselbe Verteilung besitzt.

- Beim Weißen Rauschen sind in jedem Punkt die Werte *unabhängig*, genauer: die Meßergebnisse der Zufallsgröße Γ hängen in disjunkten Zeitintervallen nicht voneinander ab, da

$$\varphi(t)\,\psi(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad C_\Gamma(\varphi,\psi) \equiv 0 \qquad (\varphi, \psi \in \mathcal{D}).$$

Mit den so getroffenen Spezifizierungen ist die Langevin-Gleichung (3.4) offensichtlich keine gewöhnliche Differentialgleichung im üblichen Sinne. Die differentielle Formulierung

$$\begin{aligned} d\Theta(t) &= -\frac{1}{\lambda}\Theta(t)\,dt + \tilde{\sigma}\Gamma(t)\,dt \\ &= -\frac{1}{\lambda}\Theta(t)\,dt + \tilde{\sigma}\,dW(t) \qquad , \end{aligned} \tag{3.5}$$

mit $\dot{W} = \Gamma$ im Distributionensinne, stellt aufgrund der Variation von Γ bzw. W innerhalb des statistischen Ensembles eine Konstruktionsvorschrift dar, mit der man bei gegebenen Anfangswerten aus den Trajektorien des Wiener-Prozesses die Trajektorien der Zufallsgröße $\Theta(t)$ ermittelt. Es handelt sich um eine *stochastische Differentialgleichung*, die in integraler Form für jedes Element T des Ereignisraumes lautet:

$$\Theta_t(T) = \Theta_{t_0}(T) - \frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t} \Theta_s(T)\,ds + \int_{t_0}^{t} \tilde{\sigma}\,dW_s(T) \quad . \tag{3.6}$$

Dabei fassen wir das zweite Integral als gewöhnliches Riemann-Stieltjes-Integral auf, berechnet für die einzelnen, fast alle stetigen Realisierungen von W_t:

$$\int_{t_0}^{t} dW_s(T) = W_t(T) - W_{t_0}(T) \qquad .$$

Ein Vorteil des von uns verfolgten Zuganges besteht offensichtlich in seiner Verallgemeinerbarkeit. Andere physikalische Annahmen über die Temperaturfluktuation führen dabei zu generalisierten Formen der Langevin-Gleichung. Der wie in (3.6) entsprechend auftretende zweite Integralterm ist dabei zu verallgemeinern, da wegen der in keinem Zeitintervall beschränkten Schwankungen des Wiener-Prozesses der Wert der approximierenden Summen im Gegensatz zum Riemann-Stieltjes-Integral i. a. von der Wahl der Zwischenstellen abhängt. Es kann jedoch auf

das mathematische Konzept der stochastischen Integrale, insb. nach Itô, übergegangen werden. Dieses Vorgehen gibt damit den Weg frei, den Temperaturprozeß allgemein als Lösung einer (Itôschen) stochastischen Differentialgleichung zu konzipieren.[10] In der Tat ist dabei ein Prozeß, der sich als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung vom Typ (A.4) ergibt, ein Markov-Prozeß[11], was im Kern damit verbunden ist, daß im physikalischen Modell mit *weißem* Rauschen gearbeitet wurde.[12] Der damit entstehende, im Anhang durch Gleichung (A.5) aufgezeigte, fundamentale Zusammenhang zwischen stochastischen gewöhnlichen und "klassischen" partiellen Differentialgleichungen – das Erfüllen nämlich einer Fokker-Planck-Gleichung durch die Übergangswahrscheinlichkeit des Lösungsprozesses der stochastischen Differentialgleichung – kann wegen Satz (A.13) nachfolgend hilfreich für die weiteren Bestimmungen in unserer Modellbildung ausgenutzt werden.

Die aufgestellte Langevin-Gleichung (3.5), mit kanonischer Wahl des (eindimensionalen) Wiener-Prozesses[13], ist eine stochastische Differentialgleichung (A.4) mit den Eigenschaften:

i. *linear*: die Funktionen $f(t,\Theta_t) = -\frac{1}{\lambda}\Theta_t$ und $G(t,\Theta_t) \equiv \tilde{\sigma}$ sind linear im zweiten Argument;

ii. *linear im engeren Sinne*: $G(t,\Theta_t) \equiv \tilde{\sigma}$ ist unabhängig von Θ_t;

iii. *autonom*: $f(t,\Theta_t) = f(\Theta_t)$ und $G(t,\Theta_t) = G(\Theta_t)$.

Unter Vorgabe eines Anfangswertes c ergibt sich daher als Lösung unmittelbar (s. [Arnold 73], Korollar 8.2.4):

$$\Theta_t = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\lambda}}\ c + \tilde{\sigma} \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{t}{\lambda}(t-s)}\ dW_s \quad . \tag{3.7}$$

Ein solcher Prozeß heißt *Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß*[14]. In der gegebenen Situation einer Temperaturabweichung von einem Temperaturmittelwert ($\Theta = 0$) ist es naheliegend, als Anfangsbedingung Θ_0 für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß eine normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert Null zu setzen; dabei skalieren wir die Varianz dieser Normalverteilung durch $\mathrm{Var}(\Theta_0) = \frac{1}{2}\lambda\tilde{\sigma}^2 =: \sigma^2$. Damit erhält man für (3.7) (f. a. $t,s \in$

[10] Zu den mathematischen Präzisierungen dieses Ansatzes s. z. B. [Arnold 73].
[11] Beweis s. [Arnold 73] Satz 9.2.3.
[12] Vgl. [Risken 89] Kap. 3.5.
[13] S. [Bauer 91] Kap. VIII.
[14] S. [Uhlenbeck, Ornstein 30] und [Wang, Uhlenbeck 45].

$[0,\infty)$):[15]

$$\mathrm{E}(\Theta_t) = 0 \quad ; \tag{3.8}$$

$$\mathrm{Var}(\Theta_t) = \frac{1}{2}\lambda\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \quad ; \tag{3.9}$$

$$\mathrm{Cov}(\Theta_s,\Theta_t) = \frac{1}{2}\lambda\tilde{\sigma}^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}|t-s|} = \sigma^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}|t-s|} \quad . \tag{3.10}$$

Mithin ergibt sich die Interpretation:

- Der Parameter σ ist wegen (3.9) diejenige Temperaturspanne, welche die Standardabweichung vom deterministischen Temperaturverlauf bei der Temperaturfluktuation angibt, σ^2 die quadrat-mittlere 'Turbulenztemperatur'.

- Wegen (3.9) und (3.10) folgt für die sog. *Korrelationsfunktion* ρ zwischen je zwei Zufallsgrößen Θ_s und Θ_t des Prozesses:

$$\rho(s,t) = \frac{\mathrm{Cov}(\Theta_s,\Theta_t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\Theta_s)\,\mathrm{Var}(\Theta_t)}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}|t-s|} \quad ; \tag{3.11}$$

  mithin ist wegen dieses charakteristischen Maßes der stochastischen Korrelation der Parameter λ als die jede Turbulenz kennzeichnende *Korrelationslänge* zu deuten. Dieser aus dem angenommenen Relaxationsverhalten (3.2) resultierende einfache Fall einer konstanten Korrelation bedeutet physikalisch, daß bei einer 'Temperaturauslenkung' durch Fluktuation die Werte des Temperaturparameters im Gaselement nur innerhalb solcher Zeitspannen korreliert sind, die von der Größenordnung der Einstellung des Temperaturgleichgewichtes sind.

Der so erhaltene markovsche Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß Θ_t ist ein stationärer Gaußscher Prozeß.[16] Da p_Θ die Vorwärts-Kolmogorov-Gleichung (A.5) erfüllt, können wir vorgreifend für die spätere Spezifizierung der Fokker-Planck-Gleichung (2.19) analog zu den Momenten (2.14) und (2.16) mit den

[15] Beweis s. [Arnold 73] Kap. 8.2 .

[16] Die stationäre Übergangswahrscheinlichkeitsdichte ist für $t_2 > t_1$ gegeben durch

$$p_\Theta(x_1,x_2,t_2-t_1) = \left(2\pi\sigma^2\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{\lambda}(t_2-t_1)}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\left(x_2 - x_1\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}(t_2-t_1)}\right)^2}{2\sigma^2\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{\lambda}(t_2-t_1)}\right)}\right) \quad .$$

(S. [Todorovic 92] proposition 3.7.3). Aufgrund des von uns gewählten Zugangs braucht die Temperaturübergangswahrscheinlichkeitsdichte zur weiteren Berechnung (s. (3.12)–(3.13)) jedoch nicht explizit verwendet zu werden.

hier gegebenen Funktionen f und G sofort angeben:

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int \Delta x \, p_\Theta(t, x, t + \Delta t, x + \Delta x) \, d\Delta x \quad = \quad -\frac{1}{\lambda} x \quad , \tag{3.12}$$

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (\Delta x)^2 \, p_\Theta(t, x, t + \Delta t, x + \Delta x) \, d\Delta x \quad = \quad \tilde{\sigma}^2 = 2\frac{\sigma^2}{\lambda} \quad . \tag{3.13}$$

3.2 Prozeßkomponente der Staubbildung

Im folgenden Schritt ist ein Ansatz für die Übergangswahrscheinlichkeit derjenigen Prozeßkomponente vorzunehmen, die Staubbildung und -wachstum probabilistisch beschreibt, um damit den Faktor $p_K(t, T, \boldsymbol{K}, t+\Delta t, \boldsymbol{K}+\Delta \boldsymbol{K})$ in der Darstellung (3.1) der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte zu erhalten. Nach den Ausführungen in Kapitel 1.1 kann Staubbildung und -wachstum unter deterministischen Bedingungen im stellaren Wind beschrieben werden durch das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt} \underline{K} = \underline{\underline{A}} \, \underline{K} + \underline{b} \quad . \tag{3.14}$$

Da sich der stochastische Charakter des Staubbildungsverlaufes nach unseren Voraussetzungen einzig aus der Temperaturabhängigkeit der physikalischen Parameter in diesem Gleichungssystem rekrutiert, kann ausgenutzt werden, daß die Lösung $\underline{K}_t(t_1,\underline{K}^1)$, mit Anfangswert $\underline{K}_{t_1} = \underline{K}^1$ ($t_1 \in \mathbb{R}_0^+$ und gegebenem $\underline{K}^1$ geeignet), den Zustand $\underline{K}^1$ zur Zeit t_1 in der Zeitspanne $t - t_1$ in den Zustand $\underline{K}_t$ zur Zeit t transportiert.[17] Bei kanonischer Wahl nämlich (s. (2.9)) der Zufallsvariablen $\mathcal{K}_t(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{K}_t$, f. a. t, setzen wir den Wert der Zufallsvariablen gleich mit dem durch die deterministische – und die durch Fluktuation gegebene Temperaturabweichung T_1 im Ausgangspunkt berücksichtigende – Rechnung gelieferten Wert: $\boldsymbol{K}_t = \underline{K}_t(t_1,\underline{K}^1)|_{T_1}$ für kleine Zeitschritte $\Delta t = t - t_1$.

Die Wahrscheinlichkeit $P_\mathcal{K}$ des Überganges vom Prozeßzustand $\boldsymbol{K}^1$ zur Zeit t_1 in einen Zustand innerhalb B zur Zeit t sei daher unter Beachtung von (3.1) für hinreichend kleine Zeitschritte unmittelbar angesetzt als:

$$\begin{aligned} P_\mathcal{K}(t_1, T_1, \boldsymbol{K}^1, t, B) \quad &= \quad \chi_{\underline{K}_t(t_1,\underline{K}^1)}(B) \\ &:= \quad \begin{cases} 1 \, , & \text{für } \underline{K}_t(t_1,\underline{K}^1)|_{T_1} \in B \\ 0 \, , & \text{für } \underline{K}_t(t_1,\underline{K}^1)|_{T_1} \notin B \end{cases} \quad . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Resultierend aus der ersten Ordnung der Staubbildungsdifferentialgleichungen handelt es sich hierbei in der Tat um eine *Markov*-Übergangswahrscheinlichkeit (gemäß Definition 2.14).

[17] Zu diesem üblichen Vorgehen vgl. z. B. [Arnold 73] Kap. 2.3 .

Für die Formulierung in Übergangswahrscheinlichkeits*dichten* verwenden wir zunächst für das deterministische System (3.14) als Näherung für hinreichend kleine Δt:

$$\Delta \underline{K} = \left(\underline{\underline{A}}\, \underline{K} + \underline{b} \right) \Delta t \qquad .$$

Unter Heranziehung der Distribution $\delta(\cdot - \boldsymbol{y})$ (mit den üblichen Schreibweisen) erhält man als Dichte p_K der Übergangswahrscheinlichkeit $P_{\mathcal{K}}$ für $\Delta t > 0$:

$$p_K(t, T, \boldsymbol{K}, t + \Delta t, \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K}) = \delta \left(\Delta \boldsymbol{K} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{b})_T \, \Delta t \right) \quad . \tag{3.16}$$

Hierbei wurde verwendet, mit charakteristischer Funktion $\chi_B(\cdot)$ und beliebigem Anfangswert $(t_1, \underline{K}^1) = (t - \Delta t, \underline{K} - \Delta \underline{K})$:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_B \delta \left(\Delta \boldsymbol{K} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{b})_{T_1} \, \Delta t \right) d^4 \Delta \boldsymbol{K} \\
&\qquad = \quad \int \chi_B(\Delta \boldsymbol{K}) \, \delta \left(\Delta \boldsymbol{K} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{b})_{T_1} \, \Delta t \right) d^4 \Delta \boldsymbol{K} \\
&\qquad = \quad \chi_B(\Delta \boldsymbol{K} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{b})_{T_1} \, \Delta t) \\
&\qquad \stackrel{\Delta t \downarrow 0}{\longrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1 \, , & \text{für } \underline{K}_t(t_1, \underline{K}^1)|_{T_1} \in B \\ 0 \, , & \text{für } \underline{K}_t(t_1, \underline{K}^1)|_{T_1} \notin B \end{array} \right\} \\
&\qquad = \quad \chi_{\underline{K}_t(t_1, \underline{K}^1)}(B) \\
&\qquad = \quad P_{\mathcal{K}}(t_1, T_1, \boldsymbol{K}^1, t, B) \qquad .
\end{aligned}$$

In konzeptioneller Hinsicht ist zu betonen, daß durch unseren Zugang die analytische Abhängigkeit der Staubbildungsmomente $\underline{K}_i(t)$, wie sie durch das deterministische System der Differentialgleichungen (3.14) gegeben wird, nunmehr transformiert ist in die stochastische Abhängigkeit der Zufallsvariablen $(\boldsymbol{K}_i)_t$, beschrieben durch deren Übergangswahrscheinlichkeitsdichte (3.16).

Hinsichtlich der Eigenschaften von p_K merken wir ferner an, daß in der Tat gilt:

$$\int p_K \, d^4 \Delta \boldsymbol{K} = \int \delta \left(\Delta \boldsymbol{K} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{b})_T \, \Delta t \right) d^4 \Delta \boldsymbol{K} = 1 \quad ,$$

und daß die Chapman-Kolmogorov-Beziehung für die Dichte mit der allgemeinen δ-Distributionseigenschaft

$$\int \delta(x - y) \delta(y - a) \, dy = \delta(x - a)$$

korrespondiert. Schließlich berechnen wir vorgreifend:

$$\begin{aligned}
\int \Delta K_\mu \, p_K \, d^4\Delta\boldsymbol{K} &= \int \Delta K_\mu \, \delta\left(\Delta\boldsymbol{K} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{b})\,\Delta t\right) \, d^4\Delta\boldsymbol{K} \\
&= \int \Delta K_\mu \prod_{\nu=0}^{3} \delta\left((\Delta\boldsymbol{K} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{b})\,\Delta t)_\nu\right) \, d^4\Delta\boldsymbol{K} \\
&= \int \Delta K_\mu \, \delta\left(\Delta K_\mu - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{b})_\mu \,\Delta t\right) \, d\Delta K_\mu \\
&= \sum_{\nu=0}^{3} \left(A_{\mu\nu} K_\nu + b_\mu\right) \, \Delta t \\
&=: \left(A_{\mu\nu} K_\nu + b_\mu\right) \, \Delta t \qquad (\mu, \nu = 0, \ldots, 3) \; ; \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\int \Delta K_\mu \, \Delta K_\nu \, p_K \, d^4\Delta\boldsymbol{K} \qquad (3.18) \\
&= \int \Delta K_\mu \, \Delta K_\nu \prod_{\lambda=0}^{3} \delta\left((\Delta\boldsymbol{K} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{b})\,\Delta t)_\lambda\right) \, d^4\Delta\boldsymbol{K} \\
&= \sum_{\lambda,\rho=0}^{3} \left(A_{\mu\lambda} K_\lambda + b_\mu\right) \left(A_{\nu\rho} K_\rho + b_\nu\right) \, (\Delta t)^2 \\
&=: \left(A_{\mu\lambda} K_\lambda + b_\mu\right) \left(A_{\nu\rho} K_\rho + b_\nu\right) \, (\Delta t)^2 \qquad (\mu, \nu = 0, \ldots, 3) \; .
\end{aligned}$$

3.3 Koeffizientenfunktionen

Mit den vorgenommenen Ansätzen zu den Temperatur- und Staubbildungskomponenten der Übergangswahrscheinlichkeit des stochastischen Prozesses $(\Theta, \mathcal{K})_t$ kann nun durch Berechnung der in den Koeffizientenfunktionen enthaltenen Momente die Fokker-Planck-Gleichung im Folgenden konkret formuliert werden. Zuvor gilt es, sich zu vergewissern, daß die getroffenen Setzungen die eingangs verwendeten Voraussetzungen bei Aufstellung der Fokker-Planck-Gleichung erfüllen.

Überprüfung der Voraussetzungen

Bei der Produktbildung $p = p_T \, p_K$ gemäß (3.1) übertragen sich in offensichtlicher Weise die nachgewiesenen Eigenschaften von p_T und (für kleine

Δt) von p_K auf p, (a) eine Übergangswahrscheinlichkeitsdichte und (b) markovsch zu sein; somit handelt es sich bei dem zugehörigen, kanonisch gewählten stochastischen Prozeß $(\Theta, \mathcal{K})$ um einen Markov-Prozeß.

Auch die bei der Herleitung der Fokker-Planck-Gleichung benötigten Voraussetzungen (s. Kapitel 2.3) sind erfüllt: Zunächst gilt für $\delta > 0$ beliebig die Voraussetzung (2.13):

$$
\begin{aligned}
0 \;\leq\; & \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \iint\limits_{\|(\Delta T, \Delta \boldsymbol{K})\| > \delta} p(t, T, \boldsymbol{K}, t + \Delta t, T + \Delta T, \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K})\, d\Delta T\, d^4 \Delta \boldsymbol{K} \\
= \; & \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \iint\limits_{\|(\Delta T, \Delta \boldsymbol{K})\| > \delta} p_T(t, T, t + \Delta t, T + \Delta T)\, p_K(t, T, \boldsymbol{K}, t + \Delta t, \\
& \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K})\, d\Delta T\, d^4 \Delta \boldsymbol{K} \\
\leq \; & \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{\|\Delta T\| > \delta} p_T(t, T, t + \Delta t, T + \Delta T)\, d\Delta T \int\limits_{\|\Delta \boldsymbol{K}\| > \delta} p_K(t, T, \boldsymbol{K}, \\
& t + \Delta t, \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K})\, d^4 \Delta \boldsymbol{K} \\
\leq \; & \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{\|\Delta T\| > \delta} p_T(t, T, t + \Delta t, T + \Delta T)\, d\Delta T \int p_K(t, T, \boldsymbol{K}, t + \Delta t, \\
& \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K})\, d^4 \Delta \boldsymbol{K} \\
= \; & \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{\|\Delta T\| > \delta} p_T(t, T, t + \Delta t, T + \Delta T)\, d\Delta T = 0 \quad ,
\end{aligned}
$$

wobei sich im letzten Schritt die Grenzwertbestimmung mit der Darstellung der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte der Temperatur aus Anmerkung 16 auf S. 33 schnell mit den Bernoulli–l'Hôpitalschen Regeln ergibt.

Darüberhinaus zeigen die nachfolgenden Momentenberechnungen, daß die Momente (2.14)–(2.18) (sogar 'unabgeschnitten') existieren und mit den erhaltenen p_T und p_K die Regularitätsannahmen erfüllt sind (vgl. S. 22).

Berechnung der Momente

Mit den physikalischen Ansätzen (3.7) und (3.16) für die Dichte der Übergangswahrscheinlichkeit $p = p_T\, p_K$ des stochastischen Prozesses $(\Theta,\mathcal{K})_t$ ergeben sich nunmehr die Koeffizientenfunktionen in der Fokker-Planck-Gleichung (2.19) durch Berechnung der Momente (2.14)–(2.18) wie folgt:

Mit (3.12) und (3.13) erhält man:

$$\begin{aligned} B_T &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\iint \Delta T\, p_T p_K\, d\Delta T\, d^4\Delta \boldsymbol{K} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int \Delta T\, p_T\, d\Delta T \\ &= -\frac{1}{\lambda}T \qquad ; \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} A_T &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\iint (\Delta T)^2\, p_T p_K\, d\Delta T\, d^4\Delta \boldsymbol{K} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int (\Delta T)^2\, p_T\, d\Delta T \\ &= 2\,\frac{\sigma^2}{\lambda} \qquad ; \end{aligned} \tag{3.20}$$

mit (3.17) und (3.19) folgt:

$$\begin{aligned} B^{\mu}_{\boldsymbol{K}} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\iint \Delta K_\mu\, p_T p_K\, d\Delta T\, d^4\Delta \boldsymbol{K} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int \Delta K_\mu\, p_K\, d^4\Delta \boldsymbol{K} \\ &= A_{\mu\nu}K_\nu + b_\mu \qquad (\mu = 0,\ldots,3)\ ; \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu}_{\boldsymbol{K}} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\iint \Delta K_\mu\, \Delta K_\nu\, p_T p_K\, d\Delta T\, d^4\Delta \boldsymbol{K} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int \Delta K_\mu\, \Delta K_\nu\, p_K\, d^4\Delta \boldsymbol{K} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left((A_{\mu\lambda}K_\lambda + b_\mu)\,(A_{\nu\rho}K_\rho + b_\nu)\,\Delta t\right) \\ &= 0 \qquad (\mu,\nu = 0,\ldots,3)\ ; \end{aligned} \tag{3.22}$$

ferner:

$$
\begin{aligned}
A^{\mu}_{T\boldsymbol{K}} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\iint \Delta K_\mu\,\Delta T\,p_T p_K\,d\Delta T\,d^4\Delta\boldsymbol{K} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\left(\frac{1}{\Delta t}\int \Delta T\,p_T\,d\Delta T\right)\,\Delta t\,\left(\frac{1}{\Delta t}\int \Delta K_\mu\,p_K\,d^4\Delta\boldsymbol{K}\right)\right\} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{1}{\Delta t}\int \Delta T\,p_T\,d\Delta T\right)\,\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)\,(A_{\mu\nu}K_\nu + b_\mu) \\
&= 0 \qquad (\mu = 0,\ldots,3)\ . \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Fokker-Planck-Gleichung

Mit den oben berechneten Momenten (3.19)–(3.23) ergibt sich somit für das Fokker-Planck-Gleichungssystem (2.19):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\,p_1}{\partial t} &= \frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial T}(T\,p_1) + \frac{\sigma^2}{\lambda}\,\frac{\partial^2\,p_1}{\partial T^2} - \frac{\partial}{\partial K_\mu}\,(p_1\,(A_{\mu\nu}K_\nu + b_\mu)) \\
&= \frac{1}{\lambda}\,\left(\frac{\partial}{\partial T}\,T + \sigma^2\,\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right)\,p_1 - \frac{\partial}{\partial K_\mu}\,(p_1\,(A_{\mu\nu}K_\nu + b_\mu))\ . \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Kapitel 4

Anfangs- / Randwertproblem

In den beiden folgenden Abschnitten werden zunächst zum Zwecke einer günstigeren physikalischen und mathematisch-numerischen Weiterbehandlung Transformationen der Fokker-Planck-Gleichungen vorgenommen und im zweiten Schritt physikalisch begründete Anfangs- und Randbedingungen aufgestellt, die zusammen mit dem Fokker-Planck'schen System partieller Differentialgleichungen ein vollständig gestelltes Problem bilden.

4.1 Transformationen des Fokker-Planck-Systems

Im sphärisch mit der Geschwindigkeit $\underline{v}$ expandierenden stellaren Wind bezeichnete bislang die Angabe $A(t)$ den A-Zustand zur Zeit t des radial nach außen fliegenden Gaselementes, welches sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Orte R_s befand ('Lagrange-Beschreibung'). Beschreiben wir den Fluß des strömenden Gases andererseits durch Angabe von $A = A(\underline{x}(t),t)$ bezogen auf einen festen Raumpunkt $\underline{x} = (x, y, z)$ in einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung im Sternmittelpunkt ('Euler-Beschreibung'), so transformiert sich der Zeitoperator d/dt der totalen Ableitung entlang der Stromlinien im mitbewegten System beim Übergang in das ortsfeste kartesische System gemäß[1]:

$$\frac{d}{dt}A \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}A + \underline{v}\cdot\nabla A + A\nabla\cdot\underline{v} = \frac{\partial}{\partial t}A + \nabla\cdot(A\,\underline{v}) \qquad , \qquad (4.1)$$

d. h. die durch die zeitliche Bewegung des Gaselementes hervorgerufene Änderung setzt sich zusammen aus der lokalen Änderung von A in der Zeit (an einem festen Raumpunkt), der durch die Konvektion des Gaselementes bedingten Veränderung $\underline{v}\cdot\nabla A$ zwischen zwei Raumpunkten (zum selben Zeitpunkt) sowie der Veränderung durch Volumenexpansion des betrachteten Gaselementes beim radialen Wegströmen.

[1] S. [Mihalas, Mihalas 84] Kap. 2.1 .

In der sphärisch symmetrischen Situation des stellaren Windes, wo in Kugelkoordinaten allgemein

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(v_\vartheta \sin\vartheta) + \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

gilt, erhalten wir daher die deterministischen Staubmomentengleichungen mit $\underline{v} = (v, 0, 0)$ in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial t}\underline{K} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v \underline{K}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{K} + \underline{b} \qquad .$$

Physikalisch vorausgesetzt wird eine stationäre Situation im stellaren Wind, d. h. alle auftretenden partiellen Ableitungen bezüglich der Zeit werden identisch Null; mithin ergibt sich:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v \underline{K}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{K} + \underline{b} \qquad . \tag{4.2}$$

Demzufolge figuriert nunmehr die radiale Koordinate r als Parameter des stochastischen Prozesses $(\Theta,\mathcal{K})$, und das Fokker-Planck-System lautet:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v p_1) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial T}(T\,p_1) + \frac{\sigma^2}{\lambda}\frac{\partial^2 p_1}{\partial T^2} - \frac{\partial}{\partial K_\mu}\left(p_1\left(A_{\mu\nu}K_\nu + b_\mu\right)\right) \quad . \tag{4.3}$$

In der physikalischen Beobachtungssituation von Sternen haben wir es im Sinne der Mittelung über das statistische Ensemble von Gaselementen der Sternatmosphäre offensichtlich mit der Messung von Erwartungswerten zu tun, so daß sich eine weitere Transformation des Fokker-Planck-Systems anbietet. Definieren wir bezüglich der Zufallsvariable K_ρ das erste Moment

$$Q_\rho := \int K_\rho\, p_1(r, T, \boldsymbol{K})\, d^4\boldsymbol{K} \qquad (\rho = 0, \ldots, 3)\ , \tag{4.4}$$

so erhält man durch Anwendung des Operators $\int d^4\boldsymbol{K}\, K_\rho$ auf Gleichung (4.3) für alle $\rho = 1, \ldots, 3$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 v \int K_\rho\, p_1\, d^4\boldsymbol{K} \;&=\; \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial T}\left\{T\int K_\rho\, p_1\, d^4\boldsymbol{K}\right\} + \frac{\sigma^2}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\int K_\rho\, p_1\, d^4\boldsymbol{K} \\ &\quad - \int \frac{\partial}{\partial K_\mu}\left(p_1\ \left(A_{\mu\nu}\,K_\nu + b_\mu\right)\right) K_\rho\, d^4\boldsymbol{K} \qquad ,\end{aligned}$$

bzw. äquivalent:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v Q_\rho\right) \;&=\; \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial T}\left(T Q_\rho\right) + \frac{\sigma^2}{\lambda}\frac{\partial^2 Q_\rho}{\partial T^2} \\ &\quad - \int \frac{\partial}{\partial K_\mu}\left(p_1\ \left(A_{\mu\nu}\,K_\nu + b_\mu\right)\right) K_\rho\, d^4\boldsymbol{K} \qquad .\end{aligned} \tag{4.5}$$

Für den letzten Term der rechten Seite von Gleichung (4.5) berechnet man:

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial}{\partial K_\mu}\left(p_1\ \left(A_{\mu\nu}\,K_\nu + b_\mu\right)\right) K_\rho\, d^4\boldsymbol{K} &= \int \frac{\partial}{\partial K_\mu}\left(p_1\ \left(A_{\mu\nu}\,K_\nu + b_\mu\right) K_\rho\right)\ d^4\boldsymbol{K} \\ &\quad - \int p_1\ \left(A_{\mu\nu}\,K_\nu + b_\mu\right) \frac{\partial}{\partial K_\mu} K_\rho\, d^4\boldsymbol{K}\ ;\end{aligned}$$

dabei ist (unter Beachtung der konzeptionellen Bemerkung auf S. 35):

$$\begin{aligned}\int p_1\ \left(A_{\mu\nu}\,K_\nu + b_\mu\right) \frac{\partial}{\partial K_\mu} K_\rho\, d^4\boldsymbol{K} &= \int p_1\ \left(A_{\mu\nu}\,K_\nu + b_\mu\right) \delta_{\mu\rho}\, d^4\boldsymbol{K} \\ &= A_{\rho\nu} \int p_1\, K_\nu\, d^4\boldsymbol{K} + b_\rho \int p_1\, d^4\boldsymbol{K} \\ &= A_{\rho\nu} Q_\nu + b_\rho \int p_1\, d^4\boldsymbol{K} \qquad ;\end{aligned}$$

unter Verwendung des Satzes von Gauß ergibt sich ferner (mit F als Oberfläche des Zustandsraumes):

$$\int \frac{\partial}{\partial K_\mu}\left(p_1\ \left(A_{\mu\nu}\,K_\nu + b_\mu\right) K_\rho\right)\ d^4\boldsymbol{K} = \int\limits_F p_1\ \left(A_{\mu\nu}\,K_\nu + b_\mu\right) K_\rho\, dF = 0 \quad ,$$

da auf F die Verteilung p_1 wegen der Wahrscheinlichkeitsnormierung auf 1 über dem gesamten Raum verschwindet und gleichzeitig die Zufallsgröße $\boldsymbol{K}$ wegen ihres endlichen zweiten Momentes quadratintegrabel ist.[2]

Zusammen erhält man mithin:

$$\int \frac{\partial}{\partial K_\mu}\left(p_1\ \left(A_{\mu\nu}\,K_\nu + b_\mu\right)\right) K_\rho\, d^4\boldsymbol{K} = -\left(A_{\rho\nu} Q_\nu + b_\rho \int p_1\, d^4\boldsymbol{K}\right) \quad .$$

Die Integration der Dichte der Wahrscheinlichkeit p_1, bei r die Temperaturabweichung T und die Staubbildung $\boldsymbol{K}$ anzutreffen, über den $\boldsymbol{K}$-Zustandsraum liefert die Temperaturverteilungsdichte p_1^T bei r, welche als Gaußdichte (A.2) des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses gegeben ist:

$$p_1^T(r,T) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-\frac{T^2}{2\sigma^2}} \qquad . \tag{4.6}$$

Damit geht nunmehr (4.3) über in das folgende System partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v Q_\rho) = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial T}(T\,Q_\rho) + \frac{\sigma^2}{\lambda}\,\frac{\partial^2 Q_\rho}{\partial T^2} + A_{\rho\nu} Q_\nu + b_\rho\, p_1^T \quad . \tag{4.7}$$

[2] S. [Bauer 91] § 25, Beispiel 2 .

Für $\rho = 0, \ldots, 3$ liefern die Lösungen Q_ρ gemäß

$$\int Q_\rho(r,T)\, dT = \iint K_\rho\, p_1(r,T,\boldsymbol{K})\, d^4\boldsymbol{K}\, dT = \mathrm{E}\,(K_\rho)\,(r) \qquad (4.8)$$

gerade die gesuchten lokalen Erwartungswerte der Zufallsvariablen $K_0, \ldots, K_3$, welche Staubbildung und -wachstum in unserem Zugang probabilistisch beschreiben.

In einem letzten Schritt schließlich führen wir zwei Transformationen durch, die sich für eine numerische Integration des Problems als günstig erweisen werden. Zunächst 'glätten' wir die Momente Q_ρ bezüglich der lokalen gaußschen Temperaturverteilungen und definieren für $\rho = 0, \ldots, 3$:

$$q_\rho(r,T) := \frac{Q_\rho(r,T)}{p_1^T(r,T)} \quad . \qquad (4.9)$$

Offensichtlich folgt aus (4.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1^T}{\partial T} &= -\frac{1}{\sigma^2} T p_1^T \\ \frac{\partial^2 p_1^T}{\partial T^2} &= -\frac{1}{\sigma^2} p_1^T + \frac{1}{\sigma^4} T^2 p_1^T \\ \frac{\partial p_1^T}{\partial r} &= 0 \quad , \end{aligned}$$

so daß man für das Fokker-Planck-System (4.7) bei Einsetzen und anschließender Division durch $p_1^T > 0$ berechnet:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v q_\rho) = -\frac{1}{\lambda} T \frac{\partial q_\rho}{\partial T} + \frac{\sigma^2}{\lambda}\frac{\partial^2 q_\rho}{\partial T^2} + A_{\rho\nu} q_\nu + b_\rho \quad . \qquad (4.10)$$

Wir definieren ferner für $\rho = 0, \ldots, 3$:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_\rho &:= r^2 v q_\rho \\ \tilde{b}_\rho &:= r^2 v b_\rho \end{aligned} \qquad (4.11)$$

und transformieren mit der vorgegebenen Geschwindigkeit v auf eine Zeitkoordinate y, die gegeben werde durch:

$$y(r) = \int_{r_{\min}}^{r} \frac{1}{v(\tilde{r})}\, d\tilde{r} \quad , \qquad (4.12)$$

wobei $r_{\min}$ nahe an der Sternoberfläche der Anfang des Integrationsgebietes ist, wo zum Zeitpunkt $y(r_{\min}) = 0$ die Betrachtung der Gasvolumenelemente

beginnt. Für den speziellen Fall etwa einer konstanten Geschwindigkeit $v = \text{const} \neq 0$ ist offensichtlich $r = vy + r_{\min}$.

Mit $dy/dr = v^{-1}$ schließlich ergibt sich als Ausgangspunkt der numerischen Bearbeitung für das Fokker-Planck-System (4.10) bei gleichzeitiger Multiplikation mit vr^2:

$$\frac{\partial \tilde{q}_\rho}{\partial y} = -\frac{1}{\lambda} T \frac{\partial \tilde{q}_\rho}{\partial T} + \frac{\sigma^2}{\lambda} \frac{\partial^2 \tilde{q}_\rho}{\partial T^2} + A_{\rho\nu} \tilde{q}_\rho + \tilde{b}_\rho \qquad (\rho = 0, \ldots, 3) \quad . \tag{4.13}$$

4.2 Anfangs- und Randbedingungen

Beim hergeleiteten Fokker-Planck-System (4.7) bzw. (4.13) handelt es sich um ein gekoppeltes System linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom parabolischen Typ, das innerhalb eines physikalisch sinnvollen Gebietes zu integrieren ist. Bei den Rändern der größten Fluktuationstemperatur sowie am Beginn des Staubbildungsgebietes sind zur Lösung dieses Systems physikalisch geeignete Bedingungen zu stellen.

Anfangsbedingung

Wie schon die deterministischen Rechnungen in Übereinstimmung mit den Beobachtungen zeigen,[3] sind nahe an der Sternoberfläche die Temperaturen in der Sternatmosphäre zu hoch für eine Entstehung von Staub. Ausgehend von einem mittleren Temperaturverlauf, wie z. B. in (1.4), und einer durch die jeweils in dem Turbulenzmodell gesetzte maximale Fluktuationstemperatur vorgegebenen Abweichung hiervon (insb. hin zu tiefen Temperaturen) ist es daher ein geeignetes Vorgehen, den Beginn des Integrationsgebietes bei $r = r_{\min}$ (bzw. $y(r_{\min}) = 0$) so weit nach innen in die Atmosphäre zu legen, daß als Anfangsbedingung das Fehlen von Staub auf dem ganzen Temperaturbereich angenommen werden kann:

$$Q_\rho(r_{\min}, T) = 0 \qquad (\rho = 0, \ldots, 3) \tag{4.14}$$

bzw. mit dem so gewählten Gebiet:

$$\tilde{q}_\rho(0, T) = 0 \qquad (\rho = 0, \ldots, 3) \; . \tag{4.15}$$

Der Integrationsvorgang kann dann bei der numerischen Lösung abgebrochen werden bei soweit vom Stern entfernten Orten im stellaren Wind, daß das staubbildende Material (im Erwartungswert) schon nahezu vollständig kondensiert ist. Ferner ist darauf zu achten, daß im Integrationsgebiet keine Fluktuationen auftreten, die physikalisch sinnlose (insb. negative) Temperaturwerte erzeugen würden.

[3] Vgl. [Gail, Sedlmayr 88].

Randbedingungen

Gemäß den Überlegungen bei der Festlegung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses gehen wir von einer an jedem Ort r bzw. zu jedem y-Zeitpunkt symmetrischen probabilistischen Temperaturfluktuation als Abweichung vom Mittelwert $\bar{T}$ aus, d. h. die Ränder des Integrationsgebietes sind bei geeigneter Ansetzung der Varianz der Temperaturturbulenz f. a. y festzulegen durch:

$$T_{\min}(y) = -T_{\max}(y) = \text{const} \qquad .$$

Für das Aufstellen der Randbedingungen sind folgende Aspekte leitend: (i) Am unteren Rand liegt aufgrund der Abweichung hin zu tiefen Temperaturen die Situation vor, daß dort äußerst rasch ein hoher Anteil des kondensierbaren Materials Staub bildet bzw. auf die schon vorhandenen Kohlenstoffnukleide aufwächst, so daß auf der unteren Trajektorie bei der Staubbildung die turbulente Situation den vergleichsweise geringsten Einfluß hat. (ii) Am oberen Rand ist aufgrund der dortigen hohen Temperaturen von geringster Staubbildung und insbesondere durch Verdampfung am stärksten behindertem Staubwachstum auszugehen im Vergleich zur Mittelkurve. (iii) Betrachtet man den Prozeß, bei gegebenem Gaußprofil das Integrationsgebiet dadurch einzuschränken, daß man nur noch immer geringere Temperaturabweichungen berücksichtigt, so muß in diesem Grenzverhalten eine Konsistenz des Randverhaltens zur deterministischen Lösung auf der (stochastisch am stärksten gewichteten) Mitteltrajektorie gegeben sein. Grundsätzlich ist es (auch bei variierenden Gaußprofilen) physikalisch unplausibel, bei sehr kleinen Temperaturabweichungen als Intergrationsgebietsgrenzen auf den Rändern ein stark von der deterministisch gerechneten Mittelkurve abweichendes Verhalten zu erwarten.

Die angeführten Charakteristika werden insbesondere dann erfüllt, wenn die Randbedingungen auf dem oberen und unteren Rand unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsgewichtung gewonnen werden als Lösungskurven des deterministischen Systems der Gail-Sedlmayr-Gleichungen auf diesen Randpfaden:

$$Q_\rho(r,T_{\min}) \;=\; K_\rho(r,T_{\min})\, p_1^T(r,T_{\min}) \qquad ,$$

$$Q_\rho(r,T_{\max}) \;=\; K_\rho(r,T_{\max})\, p_1^T(r,T_{\max}) \qquad ,$$

mit K_ρ $(\rho = 0,\ldots,3)$ als Lösung von

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 v K_\rho) = (A_{\rho\nu}\, K_\nu + b_\rho)|_{\bar{T}(r)\pm T_{\max}} \qquad , \tag{4.16}$$

bzw.

$$\frac{d}{dy}\tilde{q}_\rho = (A_{\rho\nu}\, \tilde{q}_\nu + \tilde{b}_\rho)\Big|_{\bar{T}(y)\pm T_{\max}} \qquad , \tag{4.17}$$

unter der Anfangsbedingung fehlenden Staubes.

Bezüglich des Gewichtes dieser Randbedingungswahl ist ferner auf den Umstand zu verweisen, daß aufgrund der angenommenen Fluktuationstemperaturverteilung die Temperaturwerte auf den Rändern und damit auch die dort auf dem $y\,/\,T$-Gitter situierten Staubbildungsanteile des Erwartungswertes (4.8) mit der größten Unwahrscheinlichkeit belegt sind. Dementsprechend gilt es, die konkrete Ausdehnung des Integrationsgebietes in T-Richtung bei den Computer-Berechnungen geeignet zu variieren. Dabei kann dann insbesondere numerisch getestet werden, wie sensitiv das Lösungsverhalten des Erwartungswertes von dem Wert der Randbedingungen abhängt, indem man σ sowie den von der Gaußverteilung durch Einziehen der Ränder 'abgeschnittenen' Anteil variiert und so die probabilistische Gewichtung der Randwerte in der Rechnung verändert. (In der Tat wird sich das System gegenüber der Größe der Randwerte als nicht sehr stark beeinflußt erweisen, s. u. Kapitel 6.3 .)

Damit Verträglichkeit zwischen Anfangs- und Randbedingungen gesichert ist, wird der Beginn des Gitters (im Idealfall) so tief in die Sternatmosphäre gelegt, daß auf den Rändern noch keine Staubbildung in den ersten y-Schritten einsetzt.

Kapitel 5

Numerische Behandlung

Das so erhaltene Anfangsrandwertproblem ist einer numerischen Integration zuzuführen. In einem ersten Schritt (Kapitel 5.1) wird daher eine hierfür geeignete Diskretisierung des Problems vorgenommen. Im zweiten Schritt (Kapitel 5.2) werden einige Erläuterungen gegeben zur Umsetzung dieses numerischen Lösungsweges am Computer, was dann zu den in Kapitel 6 dargestellten Ergebnissen führt.

5.1 Diskretisierung

Die Abbildung $\tilde{q}_\rho(y,T)$ $(\rho = 0, \dots, 3)$ wird bei der numerischen Behandlung auf einem diskreten Gitter ausgewertet: $y \in \{\dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, \dots\}$ und $T \in \{\dots, T_{j-1}, T_j, T_{j+1}, \dots\}$ für $k, j \in \mathbb{N}$; wir schreiben kurz: $\tilde{q}_\rho(y_k,T_j) =: \tilde{q}_\rho(k,j)$.

Mit dem Fokker-Planck-Gleichungssystem (4.13) ist ein *parabolisches* Anfangsrandwertproblem gegeben. Es liegt daher nahe, numerisch nach der impliziten Methode von Crank-Nicolson vorzugehen:[1]

Zunächst approximieren wir die erste Ableitung auf der linken Seite von (4.13) durch den Vorwärtsdifferenzenquotienten am Punkte (y_k,T_j):

$$\frac{\partial \tilde{q}_\rho}{\partial y}(k,j) \approx \frac{\tilde{q}_\rho(k+1,j) - \tilde{q}_\rho(k,j)}{y_{k+1} - y_k} \quad .$$

Sodann wird mit Crank-Nicolson eine Approximation f der rechten Seite von (4.13) an jeweils zwei aufeinanderfolgenden Zeitschichten $k+1$ und k gebildet sowie mit einem geeigneten $0 < \vartheta < 1$ gemittelt; man setzt mithin:

$$\frac{\tilde{q}_\rho(k+1,j) - \tilde{q}_\rho(k,j)}{y_{k+1} - y_k} = \vartheta f_{k+1} + (1-\vartheta) f_k \quad . \tag{5.1}$$

[1] S. z. B. [Schwarz 86] Kap. 10.2 und [Morton, Mayers 94].

Der Parameter ϑ ist bei Durchführung der numerischen Integration am Computer zur Erreichung bester numerischer Stabilität für das gegebene Problem geeignet zu variieren.

Für den Erhalt einer approximierenden Diskretisierung der rechten Seite sei zunächst eine Taylor-Entwicklung um T_j durchgeführt; diese liefert bei Einsetzen der Stellen $T = T_{j+1}$ und $T = T_{j-1}$ (mit $\partial\tilde{q}_\rho/\partial T =: \tilde{q}'_\rho$):

$$\tilde{q}_\rho(k,j+1) \approx \tilde{q}_\rho(k,j) + \tilde{q}'_\rho(k,j)\, h_j + \frac{1}{2}\tilde{q}''_\rho(k,j)\, h_j^2 \quad , \tag{5.2}$$

$$\tilde{q}_\rho(k,j-1) \approx \tilde{q}_\rho(k,j) - \tilde{q}'_\rho(k,j)\, h_{j-1} + \frac{1}{2}\tilde{q}''_\rho(k,j)\, h_{j-1}^2 \quad , \tag{5.3}$$

wobei definiert ist:

$$h_j := T_{j+1} - T_j \quad .$$

Durch Multiplikation von (5.2) mit h_{j-1}^2 und von (5.3) mit h_j^2 ergibt sich bei anschließender Differenzbildung zwischen den Gleichungen als Näherung der ersten Ableitung:

$$\tilde{q}'_\rho(k,j) \approx H_j \left[h_{j-1}^2\tilde{q}_\rho(k,j+1) + \left(h_j^2 - h_{j-1}^2\right)\tilde{q}_\rho(k,j) - h_j^2\tilde{q}_\rho(k,j-1)\right] \quad , \tag{5.4}$$

wobei definiert ist:

$$H_j := (h_j h_{j-1}^2 + h_j^2 h_{j-1})^{-1} \quad .$$

Entsprechend liefert die Multiplikation von (5.2) mit h_{j-1} und von (5.3) mit h_j bei anschließender Addition der Gleichungen als Näherung für die zweite Ableitung:

$$\tilde{q}''_\rho(k,j) \approx 2H_j \left[h_{j-1}\tilde{q}_\rho(k,j+1) - (h_{j-1} + h_j)\,\tilde{q}_\rho(k,j) + h_j\tilde{q}_\rho(k,j-1)\right] \quad . \tag{5.5}$$

Somit ergibt sich durch Einsetzen in (5.1) für *innere* Punkte des Diskretisierungsnetzes:

$$\begin{aligned} & 2\vartheta\tilde{q}_\rho(k+1,j-1)a_{k+1,j-1} + 2\vartheta\tilde{q}_\rho(k+1,j)b_{k+1,j} + \\ & 2\vartheta\tilde{q}_\rho(k+1,j+1)c_{k+1,j+1} + \vartheta\left(A_{\rho\nu}\,\tilde{q}_\nu + \tilde{b}_\rho\right)_{(k+1,j)} \\ = \; & -2(1-\vartheta)\tilde{q}_\rho(k,j-1)a_{k,j-1} + 2(1-\vartheta)\tilde{q}_\rho(k,j)d_{k,j} - \\ & 2(1-\vartheta)\tilde{q}_\rho(k,j+1)c_{k,j+1} - (1-\vartheta)\left(A_{\rho\nu}\,\tilde{q}_\nu + \tilde{b}_\rho\right)_{(k,j)} \quad , \end{aligned} \tag{5.6}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
a_{k,j-1} &:= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}T_j H_j h_j^2 + \sigma^2 H_j h_j\right) \quad , \\
b_{k,j} &:= -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}T_j H_j (h_j^2 - h_{j-1}^2) + \sigma^2 H_j (h_{j-1} + h_j)\right) - \frac{1}{2\vartheta(y_k - y_{k-1})} \, , \\
c_{k,j+1} &:= \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{2}T_j H_j h_{j-1}^2 + \sigma^2 H_j h_{j-1}\right) \quad , \\
d_{k,j} &:= -b_{k,j} - \frac{1}{2\vartheta(y_k - y_{k-1})} - \frac{1}{2(1-\vartheta)(y_{k+1} - y_k)} \quad .
\end{aligned}
$$

Die Werte der $\tilde{q}_\rho$ auf den *äußeren* Punkte des Gitters sind gegeben durch die Anfangs- und Randbedingungen (4.15) bzw. (4.17), d. h., gehen wir von einem Gitter der Art

$$(k,j) \in \{1, \ldots, k_{\max}\} \times \{1, \ldots, n\}$$

aus, so sind aus den Anfangs- und Randbedingungen

$$\tilde{q}_\rho(1,j), \ \tilde{q}_\rho(k,1) \text{ und } \tilde{q}_\rho(k,n)$$

für alle j und k bekannt, womit sich mittels des gekoppelten Differenzengleichungssystems (5.6) die Werte der $\tilde{q}_\rho(k+1,j)$ im Schritt $k+1$ aus den zuvor ermittelten Werten des Schrittes k berechnen lassen. In Matrixform schreiben wir:

$$
2\vartheta \begin{pmatrix}
b_{k+1,2} & c_{k+1,3} & & & & & 0 \\
a_{k+1,2} & b_{k+1,3} & c_{k+1,4} & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & a_{k+1,n-3} & b_{k+1,n-2} & c_{k+1,n-1} & \\
0 & & & & a_{k+1,n-2} & b_{k+1,n-1} &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\tilde{q}_\rho(k+1,2) \\ \tilde{q}_\rho(k+1,3) \\ \vdots \\ \tilde{q}_\rho(k+1,n-2) \\ \tilde{q}_\rho(k+1,n-1)
\end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & 2(1-\vartheta)\begin{pmatrix} d_{k,2} & -c_{k,3} & & & & 0 \\ -a_{k,2} & d_{k,3} & -c_{k,4} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -a_{k+1,n-3} & d_{k,n-2} & -c_{k,n-1} & \\ 0 & & & -a_{k,n-2} & d_{k,n-1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{q}_\rho(k,2) \\ \tilde{q}_\rho(k,3) \\ \vdots \\ \tilde{q}_\rho(k,n-2) \\ \tilde{q}_\rho(k,n-1) \end{pmatrix} \\
& + 2\vartheta\begin{pmatrix} -a_{k+1,1}\tilde{q}_\rho(k+1,1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -c_{k+1,n}\tilde{q}_\rho(k+1,n) \end{pmatrix} + 2(1-\vartheta)\begin{pmatrix} -a_{k,1}\tilde{q}_\rho(k,1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -c_{k,n}\tilde{q}_\rho(k,n) \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\vec{C}_\rho \qquad , \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\vec{C}_\rho = \begin{pmatrix} 2\vartheta\tilde{J}_\star(k+1,2) + 2(1-\vartheta)\tilde{J}_\star(k,2) \\ \vdots \\ 2\vartheta\tilde{J}_\star(k+1,n-1) + 2(1-\vartheta)\tilde{J}_\star(k,n-1) \end{pmatrix} \quad \text{für } \rho = 0\,,
$$

$$
\vec{C}_\rho = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{3}\frac{1}{\tau}\left(\tilde{q}_{\rho-1}(k+1,2) + 2(1-\vartheta)\tilde{q}_{\rho-1}(k,2)\right) \\ \vdots \\ \frac{\rho}{3}\frac{1}{\tau}\left(\tilde{q}_{\rho-1}(k+1,n-1) + 2(1-\vartheta)\tilde{q}_{\rho-1}(k,n-1)\right) \end{pmatrix} \quad \text{für } \rho = 1,\ldots,3\,.
$$

Zu lösen ist also pro Schritt sukzessive für jedes ρ ein lineares Gleichungssystem (5.7) mit tridiagonaler Koeffizientenmatrix. Der (globale) Diskretisierungsfehler des Crank-Nicolson-Verfahrens, die Abweichung also der Näherung von der exakten Lösung nach mehreren Integrationsschritten, ist von zweiter Ordnung in den Zeitschritten und von zweiter Ordnung in den Temperaturschritten:

$$
O\left((\Delta y_k)^2\right) + O\left(h_j^2\right) \quad .^2
$$

[2] S. [Schwarz 86] Kap. 10.2.2 .

5.2 Bemerkung zur Computerbearbeitung

Die prinzipielle algorithmische Umsetzung der so getroffenen numerischen Vorbereitungen kann durch nachfolgende Aspekte charakterisiert werden, womit gleichzeitig einige Erläuterungen zu der konkreten Durchführung der Computerberechnung gegeben sind, auf der die Ergebnisse in Kapitel 6 beruhen.

- Das lineare Gleichungssystem wird numerisch durch einen Gauß-Algorithmus mit Zeilenvertauschung über eine relative Kolumnenmaximumsstrategie gelöst ('Pivot-Suche'); eine LR-Zerlegung führt dabei zu bidiagonalen Linksdreieckmatrizen. Für jeweils einen Wert von ρ sind in jedem k-Schritt bei $(n-2)$ Unbekannten $9\,(n-3)$ Rechenschritte notwendig.[3]

  Die Integrationen bei den Erwartungswertbildungen (und Transformationen wie (4.12)) werden durch numerische Quadratur gemäß summierter Simpson-Regel vollzogen.[4]

- Die beschriebene Diskretisierung geht nicht von einem insgesamt äquidistanten Gitter aus. Vielmehr sind die Schrittweiten in der Computer-Rechnung gerade den Veränderungen der zu ermittelnden Größen anzupassen. So wird etwa im Bereich des erheblichen Anstiegs der Nukleationsrate innerhalb sehr kurzer Zeit eine Verdichtung der Zeitstützstellen vorgenommen.[5]

- Die durchgeführte numerische Integration am Computer hat für das gegebene Problem durch Tests mit variierenden Crank-Nicolson-Parametern gerade für das arithmetische Mittel $\vartheta = 0{,}5$ die beste numerische Stabilität ergeben.

- Zur Berechnung des Systems (5.7) auf dem Gitter sind zunächst in jedem Schritt $k+1$ unter den aktuellen thermodynamischen Bedingungen (Temperaturstelle, Dichtewert) die Nukleationsrate $J_\star$ und die Nettowachstumszeit τ zu berechnen; diese Bestimmung beruht auf [Gail et al. 84] und [Gauger et al. 90], vgl. o. Abschnitt 1.1, bei einer auf die wichtigsten Reaktionspartner (in einer Gaskastenanordnung) und die Hauptreaktionen konzentrierten Chemie (mit den Wachstumspartnern $\mathrm{C}\,, \mathrm{C_2}\,, \mathrm{C_2H}\,, \mathrm{C_2H_2}$; vgl. S. 4). [6]

[3] S. [Schwarz 86] Kap. 1.3.3 .

[4] Vgl. z. B. [Schwarz 86] Kap. 1.3 .

[5] Stabile numerische Ergebnisse waren – bei geeigneter Lage – durch einige 10 000 Zeitstützstellen und einige 100 Temperaturstützstellen gegeben.

[6] Verf. dankt ausdrücklich für die Zurverfügungstellung dieser bereits entwickelten Routinen zur Chemie und Staubbildung (A. Gauger, A. Fleischer, J. M. Winters et al.) durch das Institut für Astronomie und Astrophysik der TU Berlin; Dr. Jan Martin Winters sei

- Die Berechnung der Randbedingungen und vergleichsweise herangezogenen Mittelkurve (als Lösungen des deterministischen Systems) erfolgt ebenfalls mittels der im vorangehenden Punkt erwähnten Routinen.

- Wesentlich geht in die Berechnungen der über das Moment K_3 zu ermittelnde Verbrauch des kondensierbaren Materials im bisherigen Prozeßverlauf ein. Aufgrund der stochastischen, markovschen Situation wird dieser Verbrauch (insb. in Hinblick auf die Gaußverteilung der Temperaturwerte) im Mittel über alle möglichen und im Fokker-Planck-System beschriebenen Pfade im Sinne einer Fehlerkompensation am besten geliefert durch den Erwartungswert dieses Momentes im vorangegangenen Schritt k.

gedankt für seine computertechnischen Hilfen bei der Einbindung dieser Programme in die hier entwickelte 'Fluktuationsroutine'.

Kapitel 6

Ergebnisse

In den folgenden Abschnitten werden die auf den in den bisherigen Kapiteln dargelegten Grundlagen des Modells basierenden Ergebnisse der numerischen Integration des Fokker-Planck-Systems dargestellt. Zu den einzelnen Graphiken[1] in diesem Kapitel befinden sich jeweils ergänzende Abbildungen in Anhang B. Sofern nicht anders angegeben, liegen dabei den Berechnungen folgende Parameter des stellaren Windes als Standardmodell zugrunde:

$$
\begin{array}{rcl}
\bar{T} & = & T_s \left(\frac{R_s}{r}\right)^{1/2} \text{ , also } \alpha = 0{,}5 \\
R_s & = & 3{,}7{\cdot}10^{13}\,\mathrm{cm} \\
T_s & = & 2500\,\mathrm{K} \quad \text{bzw.:} \\
L_s & = & 10^4\,L_\odot \\
v & = & 20\ \mathrm{km/s} \\
M_s & = & 1\,\mathrm{M}_\odot \\
\dot{M} & = & 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{M}_\odot/\mathrm{yr} \\
\rho(r) & = & \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 v} \\
\varepsilon_C : \varepsilon_O & = & 3
\end{array}
$$

Diese Werte sind astrophysikalisch als typisch für staubbildende, kühle, kohlenstoffreiche Sterne, d. h. C–Sterne des späten Typs, rote Riesen bzw. Überriesen, anzusehen.[2] Ebenso ist immer dann, wenn nicht explizit anders vermerkt, eine Korrelationslänge gewählt, bei der der von diesem Parameter bedingte Turbulenzeffektanteil voll ausgeprägt ist (i. d. R. $\lambda = 10^{-3}\,\mathrm{s}$). Der den erfaßten Anteil der Normalverteilungen beschreibende sog. Gaußfaktor ist i. a. als $\gamma = 3{,}29$ gewählt, was einem berücksichtigten Flächenanteil von 99,9 % der Werte der Temperaturwahrscheinlichkeitsverteilung entspricht.

[1] Die Abbildungen wurden mit dem Graphikprogramm *Supermongo* erstellt. Für seine Hilfen bei der Verwendung dieses Programmes dankt Verf. cand. phys. Frank Müller (am Institut für Astronomie und Astrophysik, TU Berlin).

[2] Vgl. zur Charakterisierung solcher asymptotic giant branch (AGB-) Objekte z. B. [Sedlmayr, Winters 97].

6.1 Turbulenzeffekte

Die entscheidenden Kenngrößen für die Temperaturturbulenz der Sternatmosphäre sind die Korrelationslänge λ, die über die Streuung der Temperaturverteilung gelieferte quadratmittlere Temperaturabweichung σ^2 aufgrund der Temperaturfluktuationen sowie die angenommene maximale Temperaturschwankung; die hiermit festgelegte Breite $2\sigma\gamma$ des 'Temperaturfluktuationsschlauches' um die Mittelkurve wird durch den Gaußfaktor γ geliefert.

Durch systematische Variation dieser Parameter in den numerischen Tests ist ihr Einfluß auf Staubbildung und -wachstum in dem vorausgesetzten kühlen, kohlenstoffreichen stellaren Wind zu untersuchen. Das diesbezügliche Lösungsverhalten des Fokker-Planck-Systems wird in den Abbildungen 6.1–6.3 sowie ergänzend und erweiternd in den Anhangsabbildungen B.1–B.3 dargestellt. Ausgehend von diesen Ergebnisgraphiken halten wir fest:

Für eine *gegebene Temperaturfluktuation* (s. Abbildungen 6.1 und B.1) entstehen für $\lambda \to \infty$ und $\lambda \to 0$ die Grenzfälle der *Makro-* und *Mikroturbulenz.*

Im Fokker-Planck-System 4.7 bzw. 4.13 ist offensichtlich gerade der Operator

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial T}\,T + \sigma^2\,\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right) \tag{6.1}$$

für die charakteristischen Turbulenzeffekte verantwortlich zu machen. Beschreibt $Q_\rho(r,T)$ die Staubbildung gerade unter der Bedingung, daß die Temperaturabweichung im Intervall $[T,T + dT)$ lokalisiert ist, so bewirkt der Fokker-Planck-Operator die Wechselwirkung zwischen diesen Temperaturkanälen bzw. -moden als Übergänge zwischen ihnen bei der Turbulenz.

Im Falle der Makroturbulenz $\lambda \to \infty$ verschwindet der Einfluß dieses Operators. Die numerischen Tests ergeben in der Tat für große λ, (in der Größenordnung ab 10^8 s) als Grenzwertverhalten eine Annäherung an die (deterministisch als Lösung der Gail-Sedlmayr-Gleichungen ermittelte) klassische Lösung für fehlende Fluktuationen. Durch eine beliebig große Relaxationszeit bei Temperaturauslenkungen – einem Verbleib im ausgelenkten Zustand wie es etwa während einer sehr ausgedehnten durchlaufenden homogenen Temperatur-Störung der Fall ist – kommt es aufgrund dieser Moden-Trennung zu einem quasi-deterministischen Verhalten der Erwartungswerte; einzig bleibt der Einfluß durch die stochastische Verteilung der Fluktuationstemperaturen als Wahrscheinlichkeitsgewicht für das Auftreten bzw. die Besetzung der Moden. Diese Interpretation wird gestützt, wenn in (4.7) $\lambda \to \infty$ strebt:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v Q_\rho) = A_{\rho\nu} Q_\nu + b_\rho\, p_1^T \quad ;$$

mithin erhält man durch Integration über den T-Raum unter Beachtung von (4.8):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 v \,\mathrm{E}\,(K_\rho) = \int A_{\rho\nu} Q_\nu dT + \int b_\rho \, p_1^T \, dT \quad .$$

Insbesondere für kleine Standardabweichungen σ (vgl. Abbildung B.1), also hohem Gewicht auf dem mittleren Temperaturkanal, sind es mithin approximativ die Erwartungswerte der Zufallsgrößen, die in diesem Fall die deterministische Staubbildungsphysik erfüllen; für hinreichend kleine σ nämlich gilt (s. u. (6.2)):

$$\int A_{\rho\nu}(T) Q_\nu \, dT \quad \approx \quad A_{\rho\nu}(\bar{T}) \int Q_\nu \, dT$$

$$\int b_\rho(T) \, p_1^T \, dT \quad \approx \quad b_\rho(\bar{T}) \quad .$$

Im Falle der Mikroturbulenz $\lambda \to 0$ kommt es zur Ausbildung der Turbulenz. Bei mittleren σ und gegebenen stellaren Parametern zeigt sich gemäß der numerischen Ergebnisse die Turbulenz voll ausgeprägt (und sich dann kaum mehr verändernd) ab Korrelationszeiten der Größenordnung 10^3 s . In Hinblick auf die Korrelationsfunktion (3.11) herrscht für kleine λ eine stark unkorrelierte Fluktuation vor, was auf schnelle Relaxationsmöglichkeit, also kurzfristige Störungen, bzw. ein Turbulenzverhalten zurückzuführen ist, das aus einer Vielzahl sich zufällig überlagernder, wechselnder Einflüsse entsteht. Dementsprechend gibt es eine hohe Zahl von Übergängen zwischen den von σ vorgegebenen Fluktuationstemperaturmoden. Ergebnisgraphik 6.1 zeigt den Einfluß solcher nahezu rein zufälligen Temperaturfluktuationen, wie sie nachfolgend bei der σ-Variation näher zu besprechen sind.

Zwischen diesen beiden Grenzfällen entsteht für variierendes λ ein Übergangsgebiet, in dem sich die Turbulenzeffekte ausprägen und Temperaturmoden mischen. Die Lage dieses λ-Intervalles hängt neben den physikalischen Parametern des stellaren Windes von der Streuung σ ab (vgl. Abbildung B.1); in Übereinstimmung mit (6.1) verschiebt sich die Lage dieses mittleren Bereiches mit wachsender Fluktuation hin zu größeren Korrelationslängen.

Die durch die Korrelationslänge λ gegebenen Relaxationszeiten bei Temperaturstörungen lassen im Bereich sich voll ausprägender Turbulenz die auf kürzeren Zeitskalen ablaufende chemische Reaktionskinetik hinsichtlich der Rückkehr ins Gleichgewicht unberührt.

Für den Fall nun einer *festen Korrelationslänge*, bei der jedoch nicht die Turbulenz unterdrückt ist, gilt es, den Einfluß der Standardabweichung σ zu untersuchen (s. hierzu die Abbildungen 6.2 und B.2).

Im Vergleich zur deterministischen Mittelkurve als Lösung des Momenten-Gleichungssystems von Gail und Sedlmayr, die mit der Kennzeichnung $\sigma = 0$ in den Graphiken enthalten ist, stellen wir zunächst fest, daß für kleiner werdende σ eine Annäherung der Fluktuationskurven an diesen nichtstochastischen Fall aus der 'klassischen' Theorie gegeben ist. Da bekanntlich für $n \to \infty$ die Folge

$$\delta_n = n\, e^{-\pi n^2 x^2}$$

eine Darstellung der δ-Distribution liefert, gilt mit der Dichtedarstellung (4.6) des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses:

$$p_1^T \to \delta(T) \quad \text{für} \quad \sigma \to 0 \quad . \tag{6.2}$$

Mithin erhalten wir aus (4.7)–(4.9) in der Tat im Grenzfall $\sigma \to 0$, daß die Erwartungswerte der Zufallsvariablen das Momentengleichungssystem der deterministischen Theorie erfüllen; Integration über den T-Raum liefert für alle $\rho, \nu = 0, \ldots, 3$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 v\, \mathrm{E}\,(K_\rho) = A_{\rho\nu}(\bar{T}(r))\ \mathrm{E}\,(K_\nu) + b_\rho(\bar{T}(r)) \qquad ;$$

dabei wurde verwendet:

$$\mathrm{E}\,(K_\rho) = \int q_\rho(r,T)\, p_1^T(r,T)\, dT = q_\rho(r,0)$$

sowie:[3]

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial}{\partial T} T Q_\rho \, dT &= \int q_\rho(r,T)\delta(T)\, dT + \int T\delta(T)\frac{\partial}{\partial T} q_\rho(r,T)\, dT \\
&\quad + \int q_\rho(r,T)\, T\, \delta'(T)\, dT \\
&= q_\rho(r,0) - \int q_\rho(r,T)\delta(T)\, dT \\
&= 0 \qquad .
\end{aligned}$$

Bei ansteigenden Temperaturfluktuationen durch wachsendes σ bilden sich, insofern der λ-Wert dies zuläßt, charakteristische Temperaturfluktuationseffekte beim Verlauf der Lösungen heraus:

Zunächst ist ein deutlich früheres Einsetzen von effektiver Nukleation und Wachstum der Körner im Vergleich zur deterministischen Lösung

[3] Zu beachten ist dabei mit der Produktregel für Distributionenableitungen als Eigenschaft der Delta-Distribution: $\partial(T\delta(T)) = 0 = T\delta' + \delta$, also $T\delta'(T) = -\delta(T)$.

($\sigma = 0\,\mathrm{K}$) zu verzeichnen. Offensichtlich auf das bereits eher im stellaren Wind gegebene Vorherrschen günstiger Temperatur-Dichte-Bedingungen zurückzuführen, setzt die Staubbildung im berechneten Modell effektiv um ca. 0,75 Sternradien weiter innen in der Atmosphäre ein als bei der Lösung ohne Temperaturschwankungen.

Sodann prägt sich nach diesem 'turbulenz-beschleunigten' Anstieg der Staubbildung ein für die Fluktuationslösungen typischer Bereich heraus. Die Zone, innerhalb derer noch nicht der (über das dritte Staubmoment) gelieferte maximale Kondensationsgrad f_{cond} des kondensierfähigen Materials erreicht ist (untere Graphik), verbreitert sich mit wachsenden Streuungen der Temperatur.

Während sich ferner die Kurve der Nukleationsrate als Mittelwert der (nicht-stochastisch) berechneten Werte auf dem Temperaturgitter ergibt, zeigen die im Fokker-Planck-System berechneten Größen in ihren Erwartungswerten charakteristische Verläufe: (i) Bei zunehmend wachsenden σ kommt es rasch zur Bildung sehr großer Körner; (ii) während sich für kleine und mittlere Standardabweichungen in der fluktuations-geprägten Staubbildungszone offensichtlich durch die herrschenden Bedingungen ein Wendepunkt-artiger Verlauf in der Entwicklung der durschnittlichen Kornradiusgröße (2. Graphik von unten; vgl. Abschnitt 1.1) ergibt – von zunächst hauptsächlich größeren, dann aber durch das Vorherrschen zunehmend kleiner Partikel hin zu kleineren durchschnittlichen Radien abfallend, um dann wieder anzusteigen – bildet sich bei sehr großen Fluktuationen offensichtlich ein Gebiet heraus, in dem sich im Mittel Anzahl (mittlere Graphik, gegeben über das 0-te Moment) und Größe der Partikel netto kaum ändern; (iii) bei einer durch große Korrelationslängen gegebenen Modenentkopplung entstehen insgesamt größere Staubkörner als bei fehlender Fluktuation (s. Abbildung B.2) .

Schließlich ist insgesamt festzuhalten, daß (auch bei berücksichtigter Verdampfung von Staubpartikeln) die Temperaturfluktuation sich als ein Einfluß zeigt, der den Staubentstehungprozeß in stellaren Winden erheblich fördert und nicht behindert oder gar unmöglich macht.

Der *Einfluß der Gaußfaktoren* γ der Fluktuationstemperaturverteilungen wird in den Abbildungen 6.3 und B.3 bei jeweiligen Standardabweichungen σ verdeutlicht.

Die numerischen Lösungen (s. insbesondere Abbildung 6.3) belegen, daß die durch hohe Gaußfaktoren gegebene Berücksichtigung großer Temperaturabweichungen zumindest bei starken Fluktuationen einen deutlichen Einfluß auf die Kurven hat, während kleine Gaußfaktoren hier durch das – physikalisch offenbar *unbegründete* – Abschneiden erheblicher Anteile der Fluktuationstemperaturverteilungen turbulenzeffektunterdrückend in der mittleren Zone der Atmosphäre wirken: Insbesondere setzt die Nukleation später ein und führt zu deutlich geringeren Werten, z. B. Kondensationsgraden, im

betrachten Bereich des stellaren Windes, was mit dem offensichtlich stark eingeschränkten Integrationsgebiet bei der Erwartungswertbildung korrespondiert.

Die zugrundeliegenden Gaußfaktoren $\gamma = 0{,}5\,;1{,}0\,;1{,}5\,;2{,}58\,;3{,}89$ entsprechen dabei folgenden Anteilen der Gaußverteilung: 38 %; 68 %; 87 %; 99 %; 99,9999 %.

Entsprechend (s. Abbildung B.3) lassen für anwachsende Streuungen σ kleine Gaußfaktoren γ kaum Turbulenzeffekte auftreten, während sie sich bei größeren Gaußfaktoren deutlich herausprägen. Wie die numerischen Tests ergeben, treten ab Gaußfaktor-bedingten Temperaturschlauchbreiten, die bei der Fluktuation ca. 95 % der wahrscheinlichkeitsgewichteten Temperaturabweichungen umfassen, dann jedoch selbst bei großen σ nahezu keine Veränderungen im charakteristischen Turbulenzverlauf mehr auf (bis auf ein gewisse, aus dem Verhalten der gemittelten Nukleationsrate auf dem Temperaturgitter sich rekrutierenden Verbreiterung des mittleren Staubbildungsgebietes). Offensichtlich sind hier jedoch aus physikalischen Gründen Beschränkungen an den Wert der maximalen Temperaturfluktuation gegeben, da keine beliebig niedrigen oder gar negative Temperaturwerte entstehen dürfen; ebenso ist grundsätzlich darauf zu verweisen, daß die zugrundegelegten chemischen Reaktionen bei sehr tiefen Temperaturen nicht mehr bestimmend für den Prozeß des Staubwachstums sind.

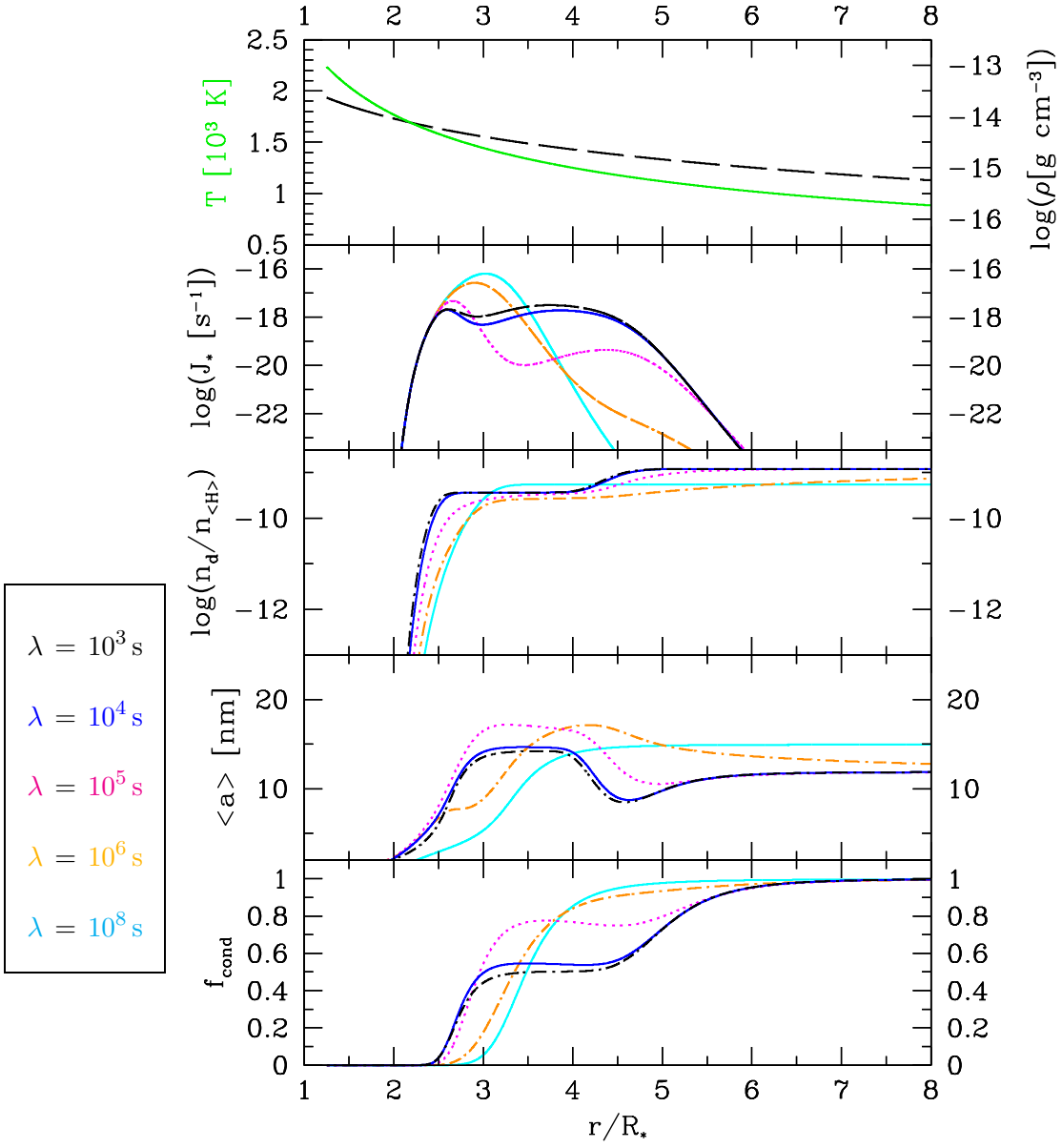


Abbildung 6.1: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei $\sigma = 60\,\mathrm{K}$ und variierenden Korrelationslängen.

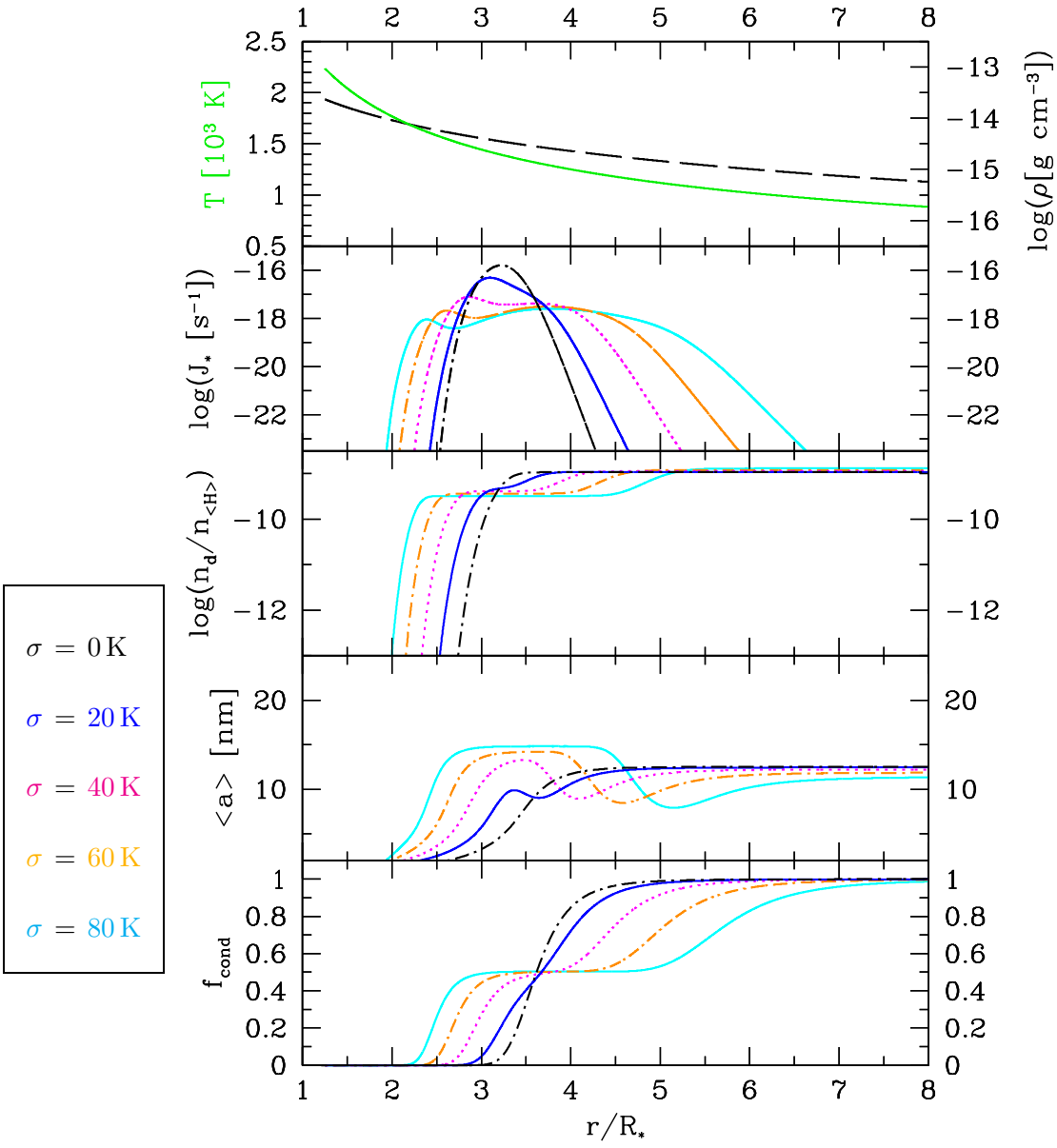


Abbildung 6.2: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Standardabweichungen σ der Fluktuationstemperaturverteilungen bei der Korrelationslänge $\lambda = 10^3\,\mathrm{s}$.

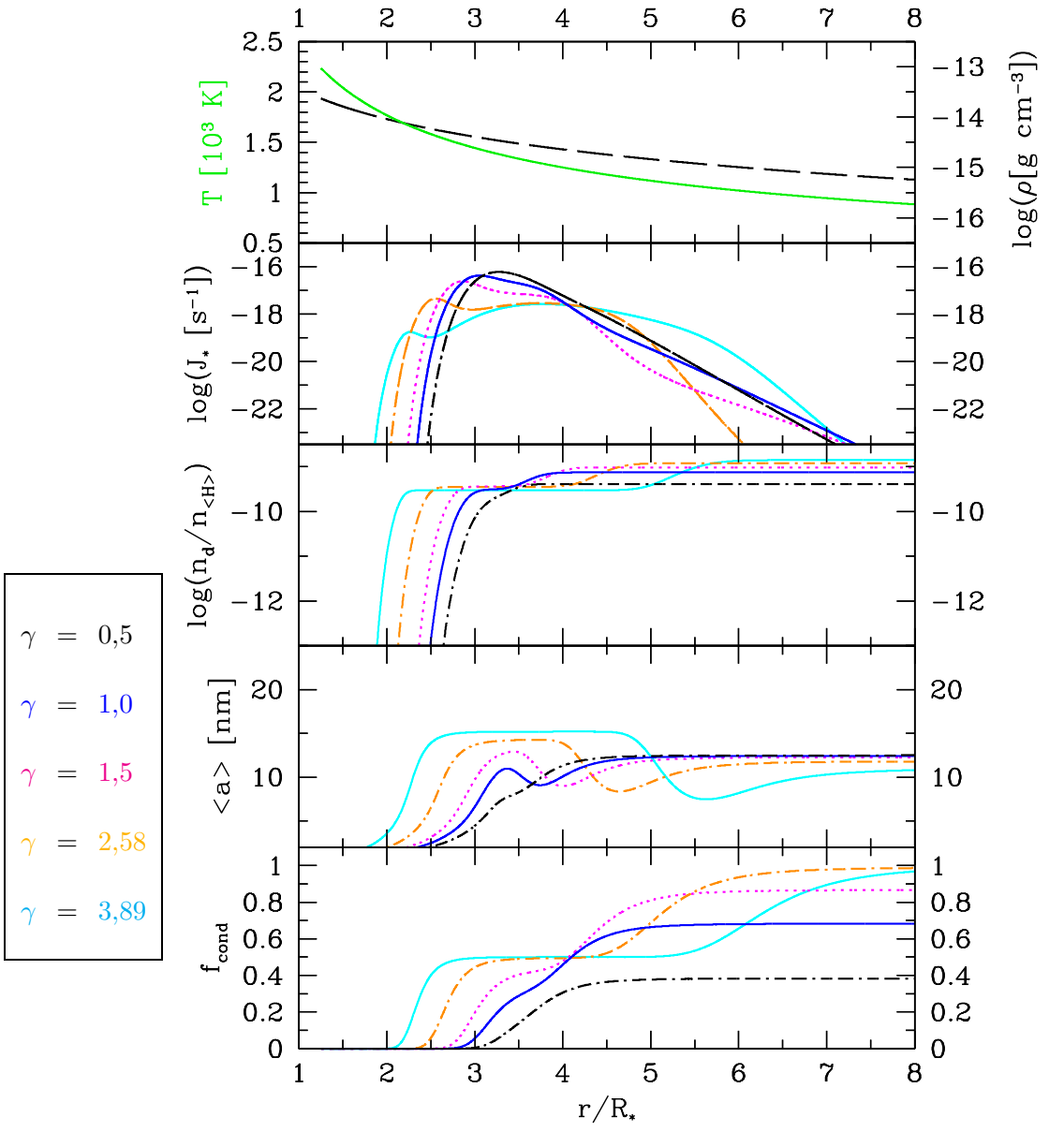


Abbildung 6.3: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei $\sigma = 80\,\mathrm{K}$ und variierenden Gaußfaktoren.

6.2 Variation des Windmodells

Nachfolgend soll kurz untersucht werden, wie sich das Lösungsverhalten des Fokker-Planck-Systems verändert, wenn die physikalischen Modellparameter des stellaren Windes variiert werden. Dabei steht hier nicht zur Diskussion das Verhalten der klassisch berechneten Staubbildung, wie sie sich an der deterministisch ermittelten, zum Vergleich hinzugezogenen Mittelkurve ($\sigma = 0$) bei unterschiedlichen Windmodellen zeigt. Das Augenmerk gilt vielmehr der Frage, bei welchen Voraussetzungen sich in Abweichung zur jeweiligen deterministischen Vergleichskurve die Turbulenzeffekte gerade besonders deutlich ausprägen.

Die Ergebnisse dieser Computerberechnungen sind in den Abbildungen 6.4–6.6 sowie in den Anhangsabbildungen B.4–B.6 dargestellt. Wir halten fest:

Windgeschwindigkeit, Mittlerer Temperaturverlauf, Massenverlustrate

Zusammenfassend kann aus dem Verhalten der Lösungskurven festgehalten werden:

Einen besonders starken Einfluß haben die Temperaturfluktuationen in folgenden Fällen:

- langsam abfallende mittlere Temperatur (vgl. (1.4)) – hierdurch wird v. a. die fluktuations-dominierte Zone noch verbreitert;
- sehr geringe Windgeschwindigkeiten – hier wird v. a. das turbulenzgetriebene frühzeitige rasche Entstehen von Staub zusätzlich befördert;
- bei geringen Massenverlustraten kommt es mit dem dadurch gegebenen Dichteverlauf (vgl. (1.4)) zu einer Verbreiterung der Staubentstehungszone durch die Fluktuationen; bei höheren Massenverlustraten ist (bei mehr kondensierbarem Material) v. a. der fluktuations-typische Effekt auf den Verlauf der Lösungen in dieser Zone stärker ausgeprägt.

$v = 5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

$v = 15\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

$v = 25\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

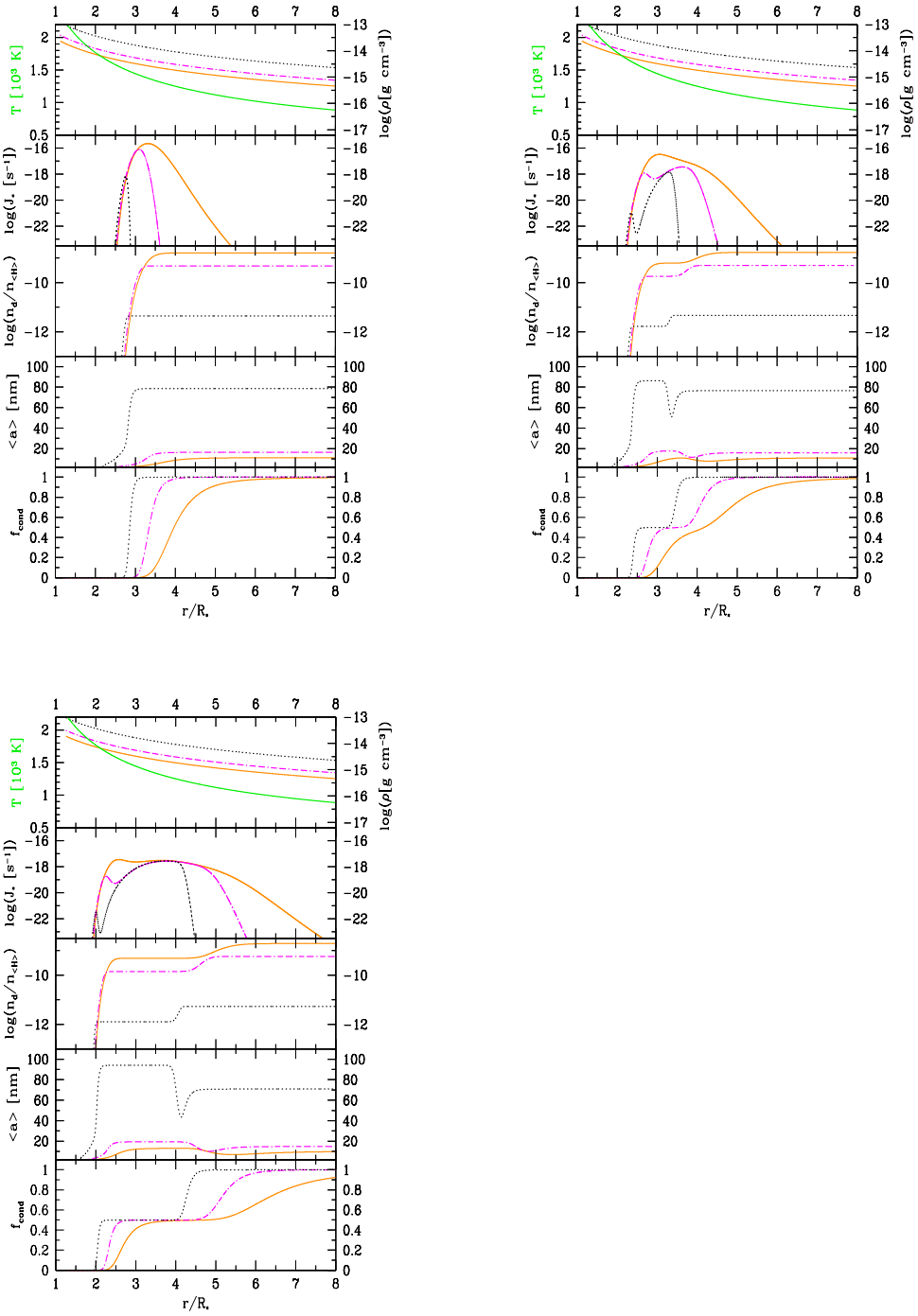


Abbildung 6.4: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Windgeschwindigkeiten: oben links für $\sigma = 0\,\mathrm{K}$; oben rechts für $\sigma = 40\,\mathrm{K}$; unten links für $\sigma = 80\,\mathrm{K}$.

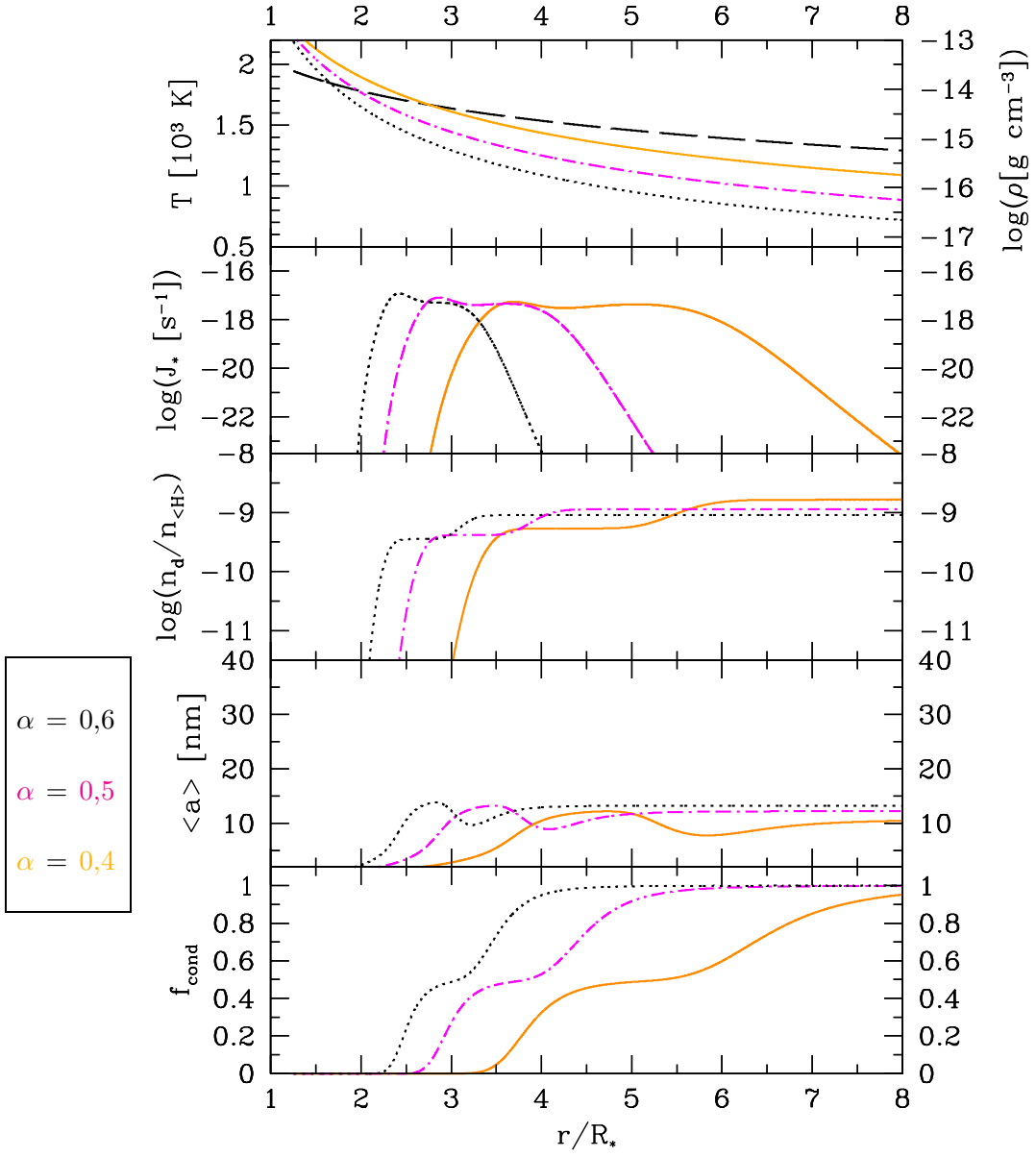
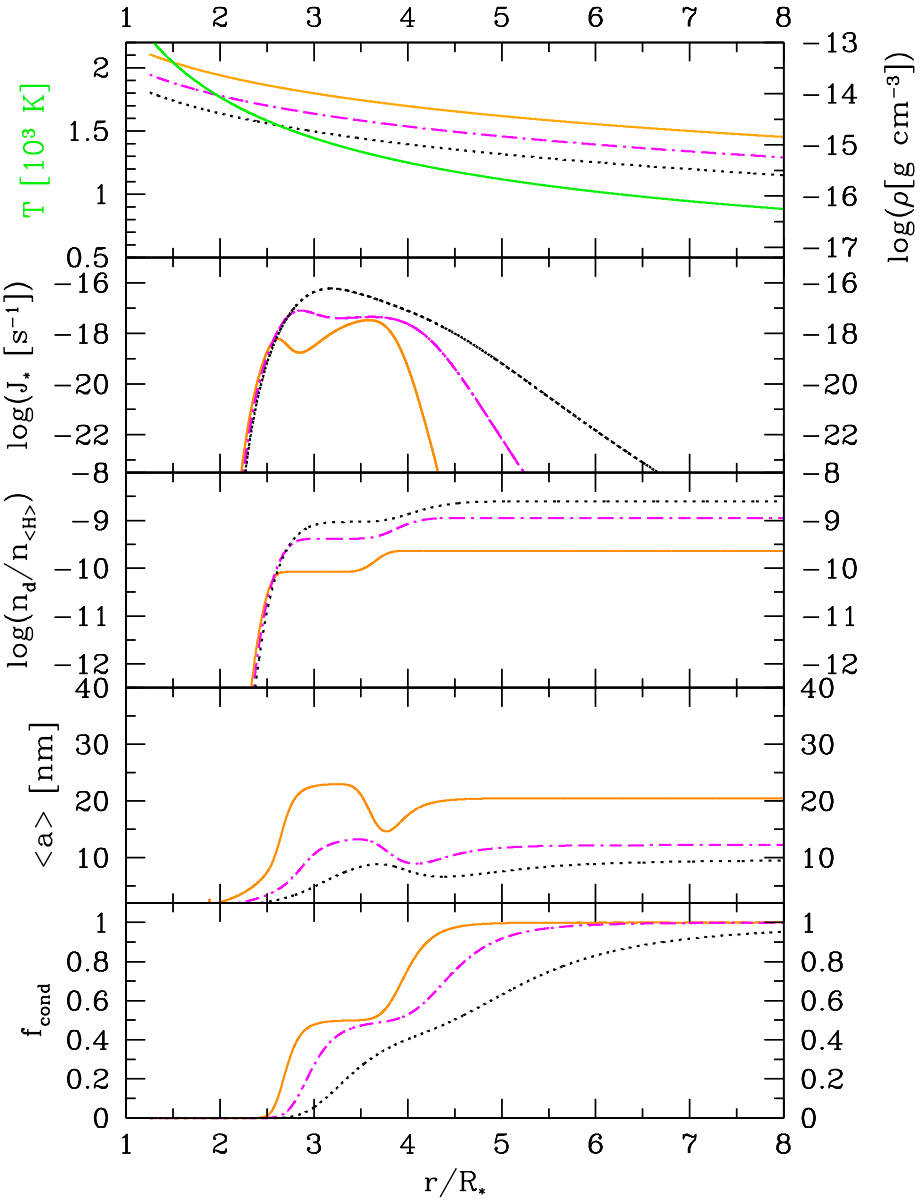


Abbildung 6.5: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei $\sigma = 40\,\mathrm{K}$ und variierenden Temperaturmittelwertkurven.



$\dot{M} = 9{\cdot}10^{-6}\,\frac{M_\odot}{yr}$

$\dot{M} = 2{\cdot}10^{-5}\,\frac{M_\odot}{yr}$

$\dot{M} = 5{\cdot}10^{-5}\,\frac{M_\odot}{yr}$

Abbildung 6.6: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei $\sigma = 40\,\mathrm{K}$ und variierenden Massenverlustraten.

Windprofil mit ortsabhängiger Geschwindigkeit

Den in Abbildung 6.7 dargestellten Verläufen liegt ein von den übrigen Untersuchungen verschiedenes Windmodell zugrunde, dessen Kerncharakteristikum eine ortsabhängige Windgeschwindigkeit ist. In der Tat wurde hier ein Windprofil bzgl. Temperatur $\bar{T}(r)$, Dichte $\rho(r)$ und Geschwindigkeit $v(r)$ vorgegeben, das sich als typisches Ergebnis eines deterministischen, selbstkonsistent gerechneten stellaren Windes (Chemie, Hydrodynamik, Strahlungstransport) unter Staubbildung ergibt.[4]

Die Parameter dieses Windmodells sind:

$$\begin{aligned} T_{\text{eff}} &= 2346\,\text{K} \\ R_s &= 7{,}29\cdot 10^{13}\,\text{cm} \\ T_s &= 2112\,\text{K} \quad \text{bzw.:} \\ L_s &= 3\cdot 10^4\,L_\odot \\ M_s &= 0{,}7\,\text{M}_\odot \\ \dot{M} &= 5\cdot 10^{-6}\,\text{M}_\odot/\text{yr} \\ \varepsilon_C : \varepsilon_O &= 1{,}4 \end{aligned}$$

Offensichtlich erfährt die Fluktuationsuntersuchung bei diesem Windprofil bei größeren als den hier getesteten Standardabweichungen σ schnell seine physikalischen (und numerischen) Grenzen, da es sich bei dem Windprofil um ein ursprünglich selbst-konsistent gerechnetes Modell handelt, d. h., daß die Entstehung von Staub als Antriebsmechanismus für den Wind auftritt. Aufgrund der Temperaturabweichungen wird in unserem Ansatz jedoch schon in Bereichen Staub gebildet, in denen äußerst geringe Windgeschwindigkeiten vorgegeben sind, so daß bei quasi ruhenden Staubkörnern ein erhebliches Wachstum auftritt.

Gleichwohl kann festgehalten werden, daß gerade auch bei nicht-konstanten Windgeschwindigkeiten bereits kleine Temperaturfluktuationen mit steigender Streuung erheblichen Einfluß auf den Verlauf von Staubbildung und -wachstum zeigen. Vergleichsweise früh und äußerst sprungartig setzt das Anwachsen der Staubteilchen ein. Der Kondensationsgrad steigt ebenfalls rasch an und zeigt dabei (unabhängig von der Dichte des Diskretisierungsnetzes) bei großen Standardabweichungen auf der Länge von ca. 0,5 Sternradien ein 'oszillierendes' Verhalten, das auf Temperatur- und Dichtebedingungen schließen läßt, die in ihrem Verlauf einen sehr sensitiven Bereich bzgl. der Neubildung kleiner Teilchen einerseits und der Assoziation mit vorhandenen zu größeren Partikeln andererseits ausbilden. Bei Beschleunigung des Windes kommt es, wie zu erwarten, im Mittel zu keinem weiteren Wachsen hin zu immer größeren Körnern, sondern zur vermehrten Neubildung

[4] Für das Zurverfügungstellen einer solchermaßen berechneten Ergebnisdatei – auf der Basis des Modells in [Winters et al. 94] – mit den Verläufen von Temperatur, Dichte und Geschwindigkeit des stellaren Windes dankt Verf. nachdrücklich Dr. Jan Martin Winters (Institut für Astronomie und Astrophysik, TU Berlin).

kleinerer Cluster. Ferner ist festzuhalten, daß bei größeren Fluktuationen ($\sigma = 25\,\mathrm{K}$) die Zahl der Staubteilchen im Verhältnis zum Wasserstoff im Vergleich zu derjenigen bei den kleineren Fluktuationen ($\sigma = 5\,\mathrm{K}$) in den äußeren Bereichen um ca. das Fünffache größer ist.

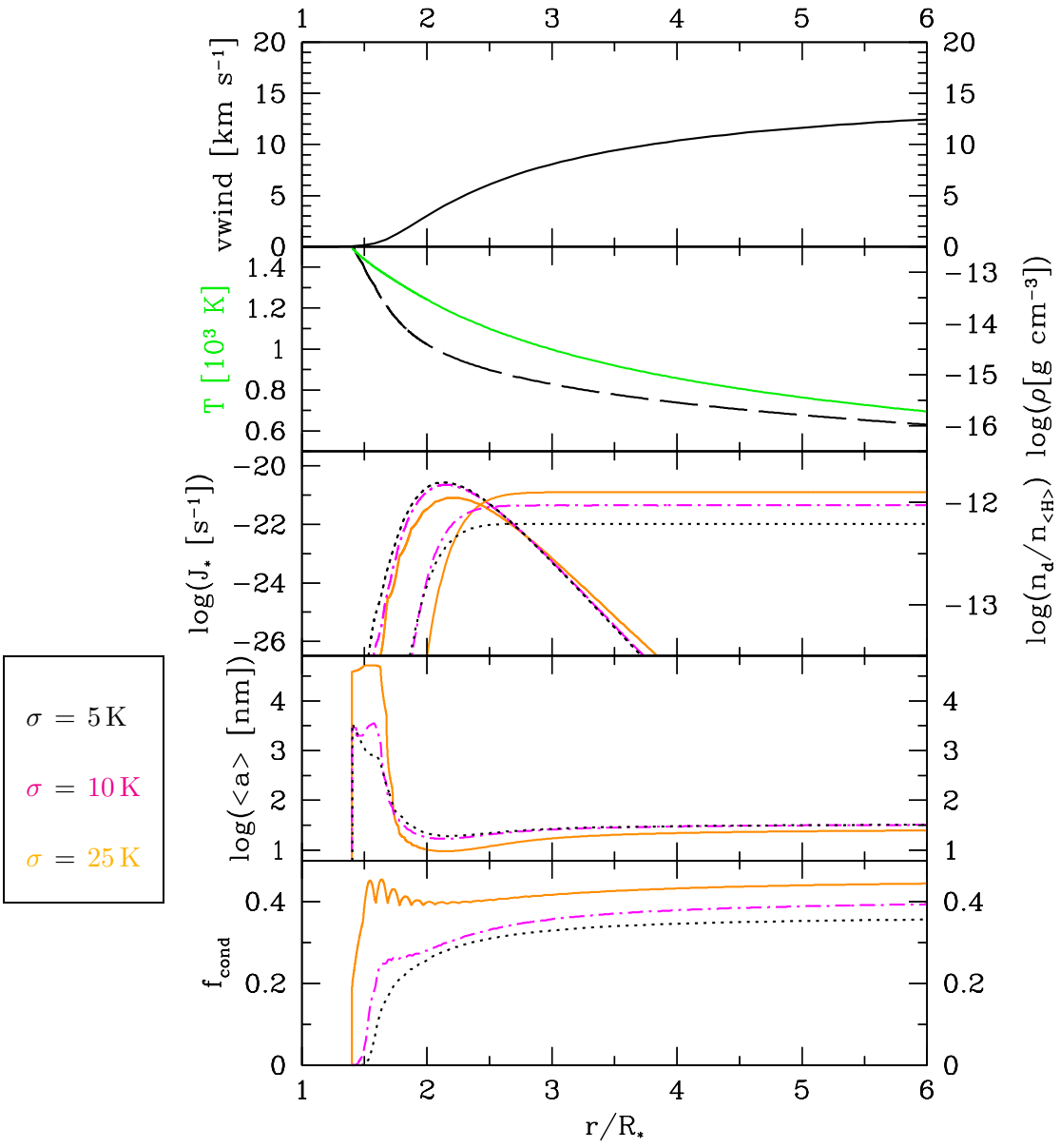


Abbildung 6.7: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei einem Windmodell mit ortsabhängigem Geschwindigkeitsverlauf des stellaren Windes.

6.3 Einfluß der Randbedingungen

Abbildung 6.8 zeigt zunächst den Verlauf der Mittelkurve, d. h. das Ergebnis der klassisch berechneten Gail-Sedlmayr-Gleichungen (1.3) für die deterministischen Staubbildungsmomente, die ebenfalls solchermaßen berechneten Vorgaben der oberen und unteren Randbedingung sowie die sich für diese Situation ($\sigma = 80\,\mathrm{K}$) ergebende Lösungskurve des fluktuierenden Systems, die sich offensichtlich in dem ihr eigenen Verlauf zumindest nicht als etwaige bloße Superposition der Randkurven erkennen läßt.

Bei der Lösung des Fokker-Planck-Anfangsrandwertproblems ist nunmehr der Test aufschlußreich, ob die im Vergleich mit der deterministischen Rechnung auftretenden typischen Effekte der Staubbildungsverläufe unter Fluktuation in ihrer Ausprägungsform wesentlich lediglich abhängen von der Vorgabe der Randbedingungen.

Abbildung 6.9 zeigt, daß die numerischen Tests eine solche Annahme nicht stützen; vielmehr ist als Ergebnis ein vergleichsweise geringer Einfluß der Wertevorgaben durch die Randbedingungskurven festzuhalten. Gerechnet werden unterschiedliche Szenarien, bei denen die Spanne der maximalen Temperaturabweichungen konstant gelassen wird (hier: $\pm 132\,\mathrm{K}$). Innerhalb dieses 'Fluktuationstemperaturschlauches' jedoch wird das Profil der Gaußverteilung über Variation der Streuung σ verändert und somit die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Temperaturwerteannahme und mithin der über den Gaußfaktor γ beschriebene Anteil der in der Normalverteilung erfaßten, mit ihren Wahrscheinlichkeiten des Auftretens gewichteten Ereignisse entsprechend verschoben. Damit verändert sich die Wahrscheinlichkeit, mit der große Temperaturabweichungen auftreten und mit der folglich ein Fluktuationstemperaturwert auf dem Rand angenommen wird, (was entsprechend die Wahrscheinlichkeit ist, mit der die Randkurven in die Erwartungswertbildung eingehen).

Die hier verwendeten Gaußfaktoren entsprechen dabei folgenden, als Prozentualanteil der durch die maximale Temperaturfluktuation abgeschnittenen Fläche unter der Normalverteilung im Verhältnis zur Gesamtfläche unter der Verteilung ausgedrückten Wahrscheinlichkeiten:[5]

$$\gamma = 1{,}65 \quad : \quad 90{,}1\%$$

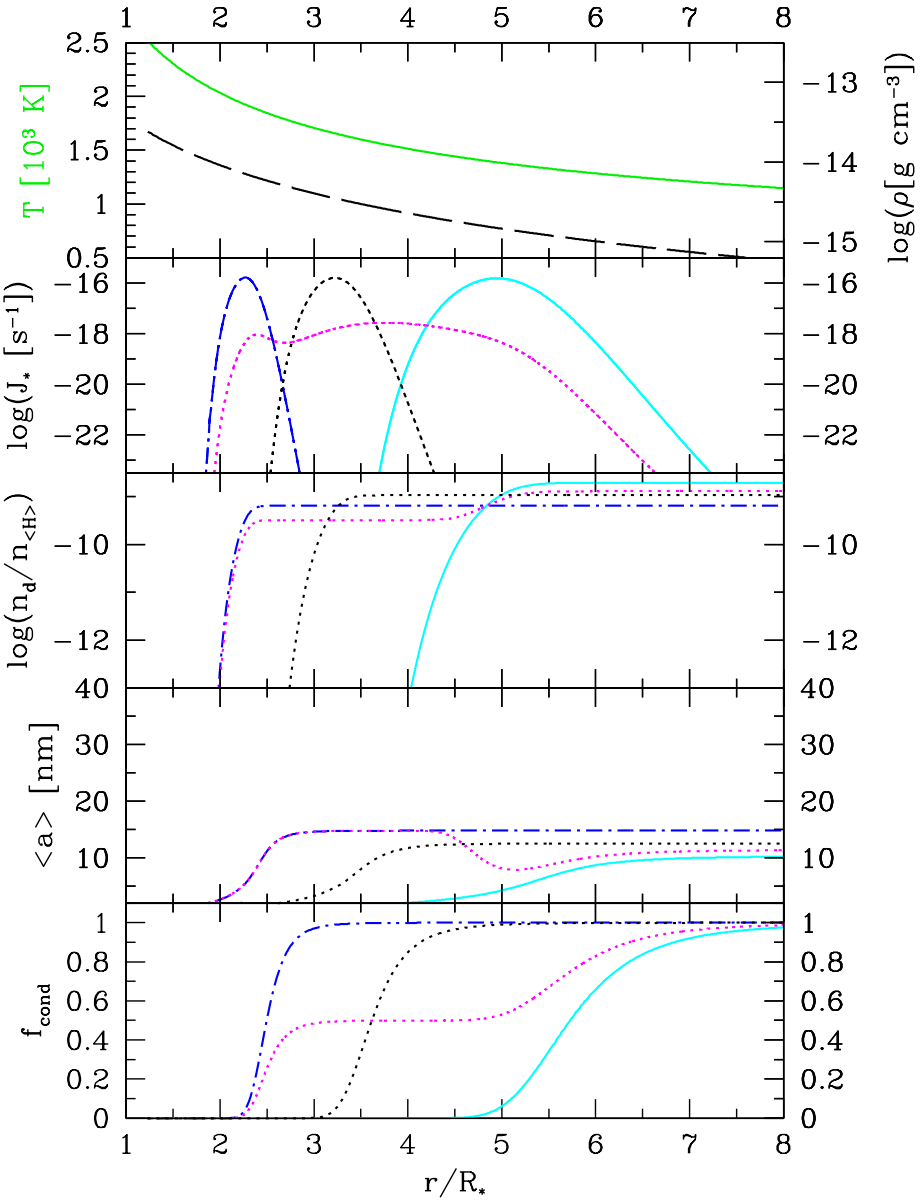
$$\gamma = 2{,}19 \quad : \quad 97{,}1\%$$

$$\gamma = 3{,}29 \quad : \quad 99{,}9\%$$

$$\gamma = 6{,}58 \quad : \quad > 99{,}99995\%$$

[5] S. Tabellierung des sog. Wahrscheinlichkeitsintegrals in [Bronstein et al. 81] Kap. 1.1.2 .

In dieser um Zehnerpotenzen sich verändernden Gewichtung der Randbedingungen tritt auch bei extremster Unwahrscheinlichkeit eines Ereignisses von Temperaturfluktuation zu einem auf den Rändern liegenden Temperaturwert kaum eine wesentliche Veränderung des Erwartungswertes der Staubildung und -wachstum beschreibenden stochastischen Größen auf, wie in Abbildung 6.9 ersichtlich. Hingegen zeigen die numerischen Tests, daß erst bei erheblichen Wahrscheinlichkeitsgewichtungen der Randkurven deutliche Veränderungen der Lösungskurven eintreten. Weder jedoch ist es physikalisch sinnvoll noch mathematisch angezeigt, in den Berechnungen von solchen im Verhältnis zur Streuung engen Abschnitten der Temperaturfluktuationsverteilung auszugehen.



Mittelkurve, obere Randbedingung, untere Randbedingung, Fluktuationskurve

Abbildung 6.8: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei $\sigma = 80\,\mathrm{K}$, $\lambda = 10^{-3}\,\mathrm{s}$ sowie $\gamma = 3{,}29$ im Vergleich zu den Kurven der Randbedingungen und der deterministisch berechneten Mittelkurve ($\sigma = 0$).

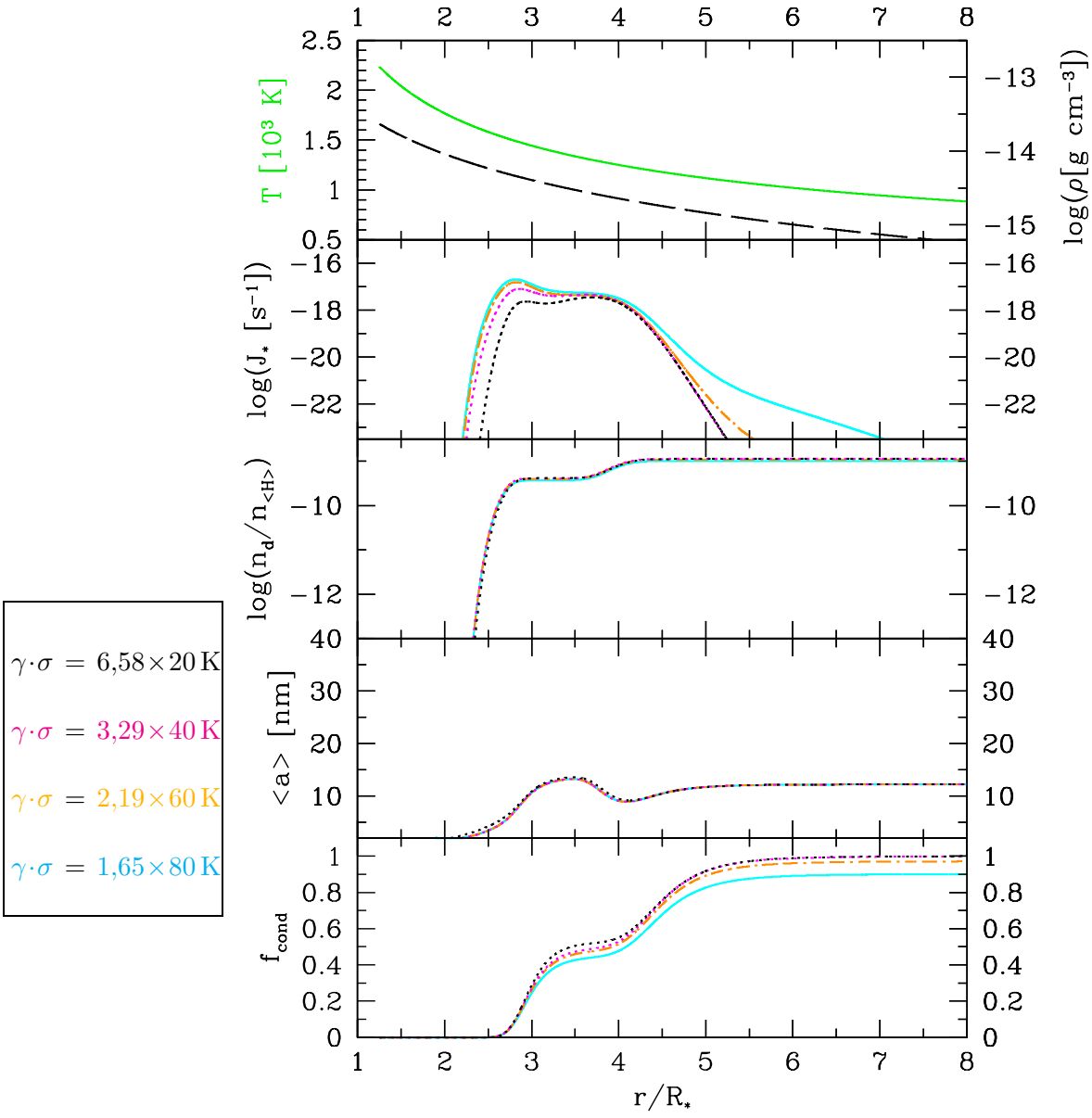


Abbildung 6.9: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei konstanter maximaler Temperaturfluktuation von ±132 K , aber unterschiedlichen Gaußkurvenprofilen.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Die systematische Berücksichtigung einer aufgrund turbulenter Atmosphärenverhältnisse fluktuierenden Temperatur bei der Untersuchung von Staubkondensation sowie Anlagerungs- und Verdampfungsprozessen beim Wachstum von Graphitkörnern in kühlen, kohlenstoffreichen stellaren Winden führt zu dem Ansatz, den gemeinsamen Verlauf der Temperaturentwicklung und der Bildung von Kohlenstoffclustern als einen stochastischen Prozeß zu formulieren.

Unter der begründeten physikalischen Annahme der Markov-Eigenschaft dieses Prozesses läßt sich ein System von Fokker-Planck-Gleichungen herleiten, als dessen Lösung sich die Wahrscheinlichkeit ergibt, zu einem gegebenen Zeitpunkt bestimmte Werte der Temperatur und der Staubbildung anzutreffen. Für eine auf die untersuchte Situation bezogene konkrete Formulierung dieses Gleichungssystems ist die Übergangswahrscheinlichkeit des Markov-Prozesses physikalisch begründet anzusetzen. Unter der Annahme einer Separierbarkeit der Übergangswahrscheinlichkeit aufgrund des Vernachlässigens der Rückwirkung der Staubbildung auf die Ursachen der Fluktuationen wird einerseits die Temperaturkomponente durch Lösung einer die Fluktuation statistisch beschreibenden stochastischen Differentialgleichung als Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß bestimmt; andererseits ergibt sich die Prozeßkomponente der Staubentwicklung mithilfe des deterministischen Systems der Momentengleichungen für Staubbildung.

Unter Setzung geeigneter Anfangs- und Randbedingungen kann das Problem bei Vorgabe eines Windmodelles einer numerischen Behandlung zugeführt werden. Die so erhaltenen Lösungen liefern für die Erwartungswerte der Zufallsvariablen als Ergebnis insbesondere (für voll ausgeprägte Turbulenzverhältnisse): (a) Bedingt durch die Temperaturfluktuationen setzt die effektive Bildung von Staub deutlich früher, 'turbulenzgetrieben' im stellaren Wind ein. (b) Der Bereich der Sternatmosphäre, innerhalb dessen sich Staubbildung und -wachstum / -verdampfung vollziehen, ist bei zunehmender Fluktuation deutlich ausgedehnter als im nicht-stochastischen Fall. In-

nerhalb dieser 'fluktuations-geprägten' Zone hängt der Verlauf der Lösungen von der Größe der Temperaturstandardabweichung ebenso ab wie von der Korrelationslänge; insbesondere entstehen überwiegend durchschnittlich rasch große Körner, deren weiteres Wachstum dann von den spezifischen Turbulenzbedingungen abhängt. (c) Während der makroturbulente Grenzfall in ein quasideterministisches Verhalten übergeht, prägen sich im Falle der Mikroturbulenz die charakteristischen Fluktuationseffekte in Abhängigkeit von der Temperaturstreuung voll aus.

Die Untersuchungen zur *astrophysikalischen Staubbildung unter fluktuierenden Temperaturbedingungen* haben mithin ergeben, daß irreguläre Temperaturschwankungen einen erheblichen Einfluß auf Bildung und Wachstum von Staub in stellaren Winden ausüben. Es ist daher für zukünftige Forschungsschritte angezeigt, weitere Einflüsse der Turbulenzbedingungen in einer Sternatmosphäre in die Modelle für Staubbildung und -wachstum einzubeziehen. Neben dem Weggang von den in unserem Prototyp gegebenen Vereinfachungen (unter Aspekten der Chemie, Hydrodynamik und des Strahlungstransportes) ist v. a. zu denken an eine ebenfalls stochastische Behandlung auch anderer Parameter des stellaren Windes (Dichte etc.) sowie an eine Berechnung der involvierten Chemie unter Fluktuationsbedingungen. Beides ist methodisch in der Linie des in dieser Arbeit entfalteten Zuganges möglich.

Anhang A

Mathematische Begriffe

Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeitsraum[1]

Definition A.1 *Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt σ-Algebra in Ω, wenn gilt:*

i. $\Omega \in \mathcal{A}$;

ii. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \complement A \in \mathcal{A}$;

iii. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *für jede Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Mengen aus* $\mathcal{A}$.

Definition A.2 *Eine Funktion $P\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ in Ω, wenn gilt:*

i. $P(\emptyset) = 0$;

ii. $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ *für jede Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *paarweise disjunkter Mengen aus* $\mathcal{A}$;

iii. $P(\Omega) = 1$.

Definition A.3 *1. Ein Paar $(\Omega,\mathcal{A})$ einer Menge Ω und einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ in Ω heißt meßbarer Raum, die Elemente von $\mathcal{A}$ meßbare Mengen.*

2. Seien $(\Omega_1,\mathcal{A}_1),(\Omega_2,\mathcal{A}_2)$ meßbare Räume. Eine Abbildung $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt meßbar, wenn für alle $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt: $f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1$.

3. Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum), wenn $\Omega \neq \emptyset$, $(\Omega,\mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$ sind. Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen Ereignisse.

[1] Vgl. hierzu und zu den folgenden Begriffen dieses Anhangs z. B. [Bauer 91], [Bauer 92] und [Arnold 73].

Zufallsvariable

Definition A.4 *Eine meßbare Abbildung* $X\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ *von einem W-Raum in den meßbaren Raum (Zustandsraum)* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ *heißt Zufallsvariable.*[2]

Wahrscheinlichkeitsdichte

Definition A.5

1. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß* P *auf einem meßbaren Raum* $(\Omega,\mathcal{A})$ *heißt absolut stetig bezüglich eines Maßes* μ *auf* $(\Omega,\mathcal{A})$*, falls alle* μ*-Nullmengen aus* $\mathcal{A}$ *auch* P*-Nullmengen sind.*

2. Lemma: *Ein W-Maß* P *auf* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ *ist genau dann absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes* λ^n*, wenn eine Lebesgue-integrierbare nicht-negative Funktion* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ *existiert, so daß* P *gegeben ist durch*

$$P(A) = \int \chi_A f \, d\lambda^n \qquad \left(=: \int \chi_A f(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}^n\right) \qquad .$$

   f ist bis auf λ^n-Nullmengen eindeutig bestimmt.[3]

   f heißt (Lebesgue-)Dichte bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte von P.

3. *Eine Zufallsgröße* X *auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mit Zustandsraum* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ *heißt absolut stetig, wenn seine Verteilung* P_X *absolut stetig ist bezüglich* λ^n*.*

Momente von Zufallsvariablen

Definition A.6 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *und* $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ *seien* $\mathbb{R}^n$*-wertige Zufallsgrößen auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*.*

1. $X_1, \ldots, X_n$ *seien* P*-integrierbar; dann heißt*

$$\mathrm{E}(X_1) := \int X_1 \, dP := \int\limits_{\Omega} X_1 \, dP$$

   Erwartungswert von X_1*. Ferner sei*

$$\mathrm{E}(X) = \int X \, dP = \begin{pmatrix} \mathrm{E}\, X_1 \\ \vdots \\ \mathrm{E}\, X_n \end{pmatrix} \qquad .$$

2. *Ist* $\mathrm{E}(X_1^2) < \infty$*, so heißt* $\mathrm{Var}(X_1) := \mathrm{E}\left((X_1 - \mathrm{E}(X_1))^2\right)$ *Varianz von* X_1*,* $\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}$ *Streuung bzw. Standardabweichung.*

3. *Ist* $\mathrm{E}\left(X_1^2\right), \mathrm{E}\left(X_2^2\right) < \infty$*, so heißt*

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_1,X_2) &:= \mathrm{E}((X_1 - \mathrm{E}(X_1))(X_2 - \mathrm{E}(X_2))) \\ &= \mathrm{E}(X_1 X_2) - \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2) \end{aligned}$$

[2] Hierbei bezeichne $\mathcal{B}^n$ die von den offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra der Borelschen Mengen. S. [Bauer 92] § 6.

[3] Der Beweis ergibt sich als Spezialfall des Satzes von Radon-Nikodym; s. [Bauer 92] §17.

Covarianz von X_1 und X_2. Ist $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = 0$, *nennt man X_1 und X_2 unkorreliert.*

Die symmetrische und nicht-negativ definite $n \times n$-Matrix $\mathrm{Cov}(X,Y) := (\mathrm{Cov}(X_i,Y_j))$ *heißt Covarianzmatrix von X und Y, wobei speziell* $\mathrm{Cov}\, X := \mathrm{Cov}(X,X)$.

4. *Ist die Zufallsgröße $X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$ ($k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ geeignet) P-integrierbar, so heißt $\mathrm{E}(X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n})$ das $(k_1, \ldots, k_n)$-te gemischte Moment von X bzw. $X_1, \ldots, X_n$ der Ordnung $k_1 + \cdots + k_n$; das n-te Moment von $X_i - \mathrm{E}(X_i)$ heißt n-tes zentrales Moment von X_i.*

Statistische Unabhängigkeit

Definition A.7 *$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum.*

1. *Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ heißen statistisch unabhängig, wenn gilt:*

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) \quad . \tag{A.1}$$

2. *Unter-σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ von $\mathcal{A}$ heißen unabhängig, wenn für jede mögliche Wahl von Ereignissen $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ (A.1) gilt.*

3. *Zufallsgrößen $X_i \colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ heißen unabhängig, wenn die von ihnen erzeugten σ-Algebren $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}(X_i)$ in $\mathcal{A}$ unabhängig sind.*

4. *Beliebige Familien $(A_i)_{i \in I}$, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ bzw. $(X_i)_{i \in I}$ heißen unabhängig, wenn für jede Wahl je endlich viele Ereignisse, σ-Algebren bzw. Zufallsgrößen aus der Familie unabhängig sind.*

Bedingter Erwartungswert

Der bedingte Erwartungswert ist charakterisiert durch:

1. Für gegebenes X und $\mathcal{C}$ ist $\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{C})$ eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion von $\omega \in \Omega$.
2. $\mathrm{E}\,(\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{C})) = \mathrm{E}(X)$.
3. Im Falle der stärksten Vergröberung, $\mathcal{C} := \{\emptyset, \Omega\}$, gilt f. s. $\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{C}) = \mathrm{E}(X)$.
4. Sind X und $\mathcal{C}$ unabhängig, folgt $\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{C}) = \mathrm{E}(X)$.

Äquivalenz stochastischer Prozesse

Definition A.8 *Zwei stochastische Prozesse $(X_t)_{t \in I}$ und $(\tilde{X}_t)_{t \in I}$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit derselben Parametermenge und gleichem Zustandsraum heißen äquivalent, wenn gilt:*

$$P(\{\omega \,;\, X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)\}) = 1 \qquad \text{für jedes } t \in I \ .$$

Markov-Prozeß

Satz A.9 *Für einen Markov-Prozeß $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gelten folgende zur Markoveigenschaft (2.10) äquivalenten Bedingungen fast sicher:*

i. $P(A \,|\, \mathcal{A}([0,t_1])) = P(A \,|\, X_{t_1})$ *für alle* $0 \le t_1 \le t_2$ *und* $A \in \mathcal{A}([t_2,\infty))$ *;*

ii. $E(Y \,|\, \mathcal{A}([0,t_1])) = E(Y \,|\, X_{t_1})$ *für alle* $0 \le t_1 \le t_2$ *sowie* $\mathcal{A}([t_2,\infty))$*-meßbaren und integrablen* Y *;*

iii. $P(A_1 \cap A_2 \,|\, X_t) = P(A_1 \,|\, X_t) P(A_2 \,|\, X_t)$ *für alle* $0 \le t_1 \le t \le t_2, A_1 \in \mathcal{A}([0,t_1])$ *und* $A_2 \in \mathcal{A}([t_2,\infty))$ *;*

iv. $P(X_t \in B \,|\, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = P(X_t \in B \,|\, X_{t_n})$ *für alle* $n \ge 1,\ 0 \le t_1 < \cdots < t_n < t$ *und* $B \in \mathcal{B}^n$ *.*[4]

Konstruktion eines Markov-Prozesses

Zur Durchführung der Bildung eines Markov-Prozesses gemäß Satz (2.15) sei innerhalb einer (etwa entlang der physikalischen Zeitfolge) totalgeordneten Parametermenge: $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_m$ $(m \in \mathbb{N})$; sei ferner

$$\nu_{t_1,\dots,t_m}(B_1 \times \cdots \times B_m) :=$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{B_1} \cdots \int_{B_m} P(t_{m-1}, \boldsymbol{x}_{m-1}, t_m, B_m) P(t_{m-2}, \boldsymbol{x}_{m-2}, t_{m-1}, d\boldsymbol{x}_{m-1}) \cdots$$

$$\cdots P(0, \boldsymbol{x}_0, t_1, d\boldsymbol{x}_1) P_{t_0}(d\boldsymbol{x})$$

mit $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}^n$. Für eine beliebige endliche Parameterfamilie $t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(m)} \in \mathbb{R}_0^+$, σ Permutation auf $\{1, \dots, m\}$, sei durch ordnende Rückpermutation σ^{-1}:

$$\nu_{t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(m)}}(B_1 \times \cdots \times B_m) :=$$

$$\nu_{t_1,\dots,t_m}(B_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times B_{\sigma^{-1}(m)}) \qquad \text{(für alle } m \in \mathbb{N}) \quad .$$

Man erhält damit offensichtlich konsistente endlich-dimensionale Verteilungen, aus denen sich mit dem Fundamentalsatz von Kolmogorov ein bis auf stochastische Äquivalenz eindeutiger stochastischer Prozeß ergibt, der ein Markov-Prozeß mit den geforderten Eigenschaften ist.[5]

Rein zufällige Prozesse

Definition A.10 *Ein stochastischer Prozeß heißt rein zufällig, wenn für seine endlich-dimensionalen Verteilungen gilt:*

$$p_n(t_1, \boldsymbol{x}_1; \dots; t_n, \boldsymbol{x}_n) = \prod_{i=1}^{n} p_1(t_i, \boldsymbol{x}_i) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

[4] Beweis s. [Doob 60] chap. II, § 6 .

[5] S. [Arnold 73] Satz 2.2.5 und [Bauer 91] Satz 42.9 .

Gaußverteilung, Gauß-Prozeß

Definition A.11 *i. Für Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ heißt ein W-Maß $N(a,\sigma^2)$ auf $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ eine Normal- bzw. Gaußverteilung, wenn es die Wahrscheinlichkeitsdichte*

$$g_{a,\sigma^2} := (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{A.2}$$

besitzt.

ii. Ist das von einer reellen Zufallsgröße X induzierte W-Maß eine Gaußverteilung $N(a,\sigma^2)$, so heißt X eine Gauß-verteilte Zufallsgröße.[6]

iii. Ein W-Maß $N_n(\boldsymbol{m},C)$ auf $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}^n)$ mit $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$ und einer symmetrischen, positiv definiten $n \times n$-Matrix C heißt Gauß-Maß mit Dichte g, wenn für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$N_n(\boldsymbol{m},C) \quad = \quad g\lambda^n \quad , \text{ mit}$$

$$g(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} (\det C)^{-\frac{1}{2}}\ \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^t C^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})\right) \quad .$$[7]

iv. Ein reeller stochastischer Prozeß $(X_t)_{t\in I}$ heißt Gauß-Prozeß, wenn jede seiner endlich-dimensionalen Verteilungen ein Gauß-Maß ist.

v. Für einen Gauß-Prozeß $(X_t)_{t\in I}$ heißen die Funktionen $m\colon I \to \mathbb{R}$, $m(t) := \mathrm{E}(X_t)$ bzw. $\hat{\rho}\colon I \times I \to \mathbb{R}$, $\hat{\rho}(s,t) := \mathrm{Cov}(X_s,X_t)$ die Erwartungs- bzw. Covarianzfunktion des Prozesses.

Ein Gauß-Prozeß ist durch seine Erwartungs- und Covarianzfunktion bis auf Äquivalenz eindeutig festgelegt.[8]

Wiener-Prozeß

Definition A.12 *Ein n-dimensionaler homogener Markov-Prozeß $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ heißt Wiener-Prozeß, wenn für seine (stationäre) Übergangswahrscheinlichkeit P gilt:*

$$P(t,\boldsymbol{x},\cdot) = \begin{cases} N_n(\boldsymbol{x}, t\,\mathrm{E}_{n\times n}) & \text{für } t > 0 \\ \chi_x(\cdot) & \text{für } t = 0 \end{cases} \quad .$$

W_t ist das mathematische Modell der standardisierten Brownschen Bewegung eines freien Partikels und kann äquivalent so gewählt werden, daß die Realisierungen fast sicher stetig sind. W_t ist Gaußsch mit:

$$\mathrm{E}(W_t) \quad = \quad 0 \qquad \text{und}$$

$$\mathrm{Cov}(W_s,W_t) \quad = \quad \min(s,t)\, E_{n\times n} \quad . \tag{A.3}$$

[6] Es gilt dann: $\mathrm{E}(X) = a$ und $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

[7] Eine dieses Maß induzierende Zufallsgröße X ist dann Gauß-verteilt, mit $\mathrm{E}(X) = \boldsymbol{m}$ und $\mathrm{Cov}\, X = C$; s. [Bauer 91] § 30.

[8] S. [Bauer 91] § 43.

Der Wiener-Prozeß hat unabhängige Zuwächse, d. h. für je endlich viele Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_i$ sind die Zufallsgrößen $W_0, W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots$, $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ unabhängig. Für alle $s < t$ haben die Zuwächse $W_t - W_s$ die nur von $t - s$ abhängigen Verteilungen $N_n(0, (t-s)\,\mathrm{E}_{n\times n})$.[9]

Spektraldarstellung

Für einen stationären stochastischen Prozeß $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, mit $X_t \in L^2$ (f. a. $t \in \mathbb{R}$) und Quadratmittel-Stetigkeit $\lim\limits_{t\to s} \mathrm{E}\left(|X_t - X_s|^2\right) = 0$, existiert eine $n \times n$-Matrix-wertige Abbildung F mit den Eigenschaften

i. $F(u_2) - F(u_1)$ nicht-negativ definit ($u_1 < u_2$ beliebig),

ii. $\mathrm{spur}(F(\infty) - F(-\infty)) < \infty$,

so daß die Covarianzmatrix des Prozesses die Darstellung

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tu}\; dF(u) \quad , \; -\infty < t < \infty$$

besitzt. F gibt die Frequenzen der am 'Aufbau' von X_t beteiligten harmonischen Schwingungen an. Existiert eine Dichte von F, so heißt sie Spektraldichte von X_t.

Diffusionsprozeß

Satz A.13 *Ist die stochastische Differentialgleichung*[10]

$$\begin{aligned} dX_t &= f(t,X_t)\,dt + G(t,X_t)\,dW_t \\ X_{t_0} &= c \qquad , \end{aligned} \tag{A.4}$$

mit $t_0 \le t \le t_e$, $f(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ meßbar, $W_t \in \mathbb{R}^m$, $G(t,\boldsymbol{x})$ $n \times m$-matrixwertige meßbare Funktion, c eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsgröße, eindeutig lösbar[11] *und sind f und G stetig in t, so gilt:*

1. *Die Lösung X_t ist ein sog. n-dimensionaler 'Diffusionsprozeß' in $[t_0,t_e]$, d. h. für die Übergangswahrscheinlichkeit dieses Markov-Prozesses (mit fast sicher stetigen Realisierungen) gilt für jedes $s \in [t_0,t_e)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$:*

   (a) $\lim\limits_{t\downarrow s} \dfrac{1}{t-s} \displaystyle\int_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|>\varepsilon} P(s,\boldsymbol{x},t,d\boldsymbol{y}) = 0$;

   (b) es gibt eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion $\tilde{f}(s,\boldsymbol{x})$ ('Driftvektor') mit

$$\lim_{t\downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\le\varepsilon} (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) P(s,\boldsymbol{x},t,d\boldsymbol{y}) = \tilde{f}(s,\boldsymbol{x}) \quad ;$$

[9] Vgl. [Bauer 91] § 40 und [Arnold 73] Kap. 3.1 .

[10] Zu den Konzepten des Itô-Integrals und der stochastischen Differentialgleichungen s. z. B. [Arnold 73].

[11] S. die Voraussetzungen hierfür in [Arnold 73] Satz 6.2.2 .

(c) es gibt eine $n \times n$-matrixwertige Funktion $B(s,\boldsymbol{x})$ ('Diffusionsmatrix') mit

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| \leq \varepsilon} (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^t P(s,\boldsymbol{x},t,d\boldsymbol{y}) = B(s,\boldsymbol{x}) \quad .$$

2. Für X_t sind $\tilde{f}(\cdot,\cdot) = f(\cdot,\cdot)$ und $B(\cdot,\cdot) = G(\cdot,\cdot)\, G^t(\cdot,\cdot)$.[12]

Ist $p(s,\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte des so erhaltenen Diffusionsprozesses und sind die Regularitätsvoraussetzungen wie in Abschnitt 2.3 erfüllt, so ergibt sich unmittelbar, daß $p(s,\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ für $s < t$ (s und t fest) Fundamentallösung der Fokker-Planck-Gleichung (bzw. Vorwärts-Kolmogorov-Gleichung) ist, d. h. es gilt:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(f_i(t,\boldsymbol{y})\, p\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(B_{ij}(t,\boldsymbol{y})\, p\right) = 0 \quad , \tag{A.5}$$

$$\lim_{t \downarrow s} p(s,\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \quad .$$

[12] Zum Beweis des Satzes s. [Arnold 73] Kap. 9.3 .

Anhang B

Weitere Abbildungen

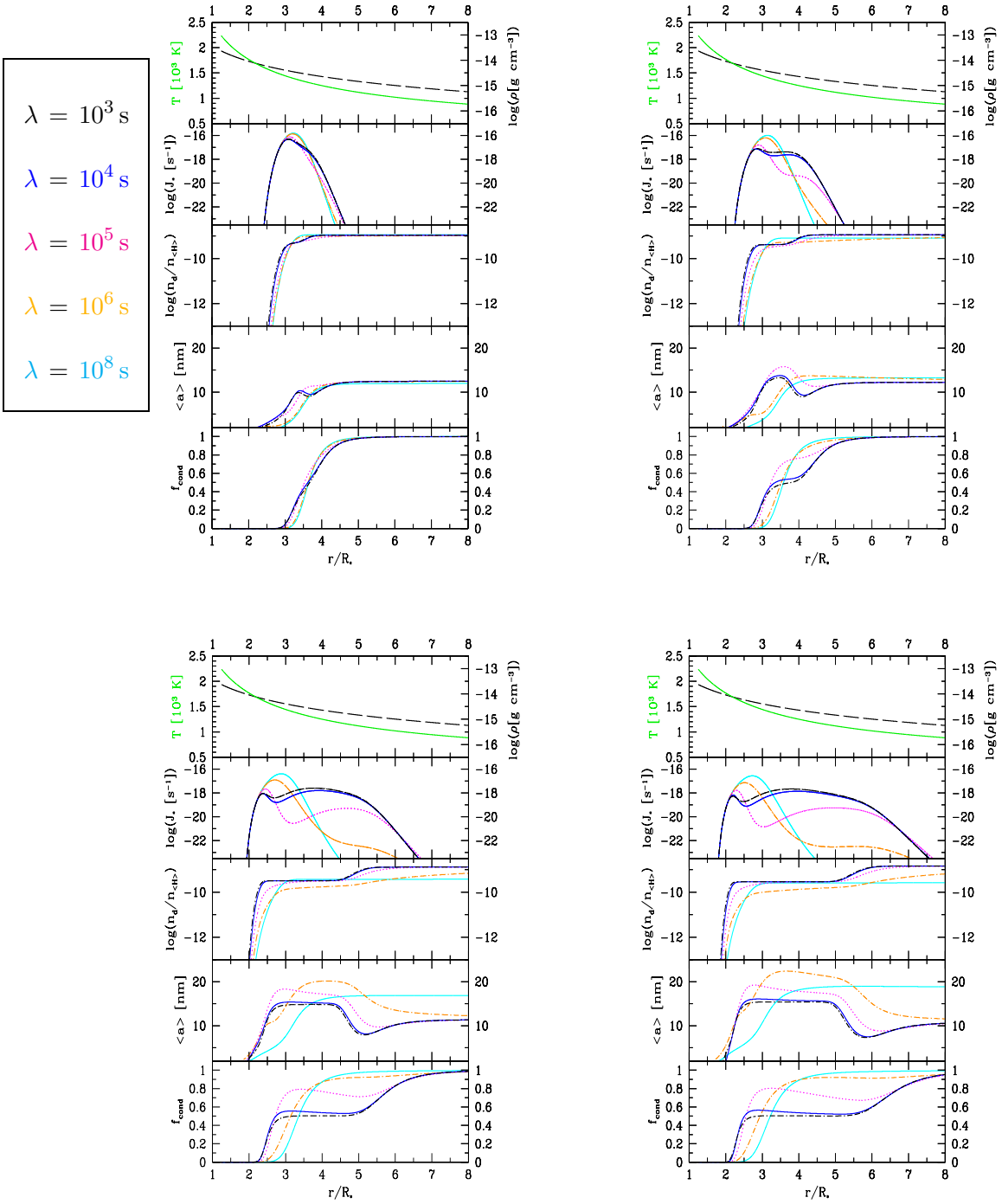


Abbildung B.1: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Korrelationslängen und verschiedenen σ: oben links $\sigma = 20$K; oben rechts $\sigma = 40$K; unten links $\sigma = 80$K; unten rechts $\sigma = 100$K .

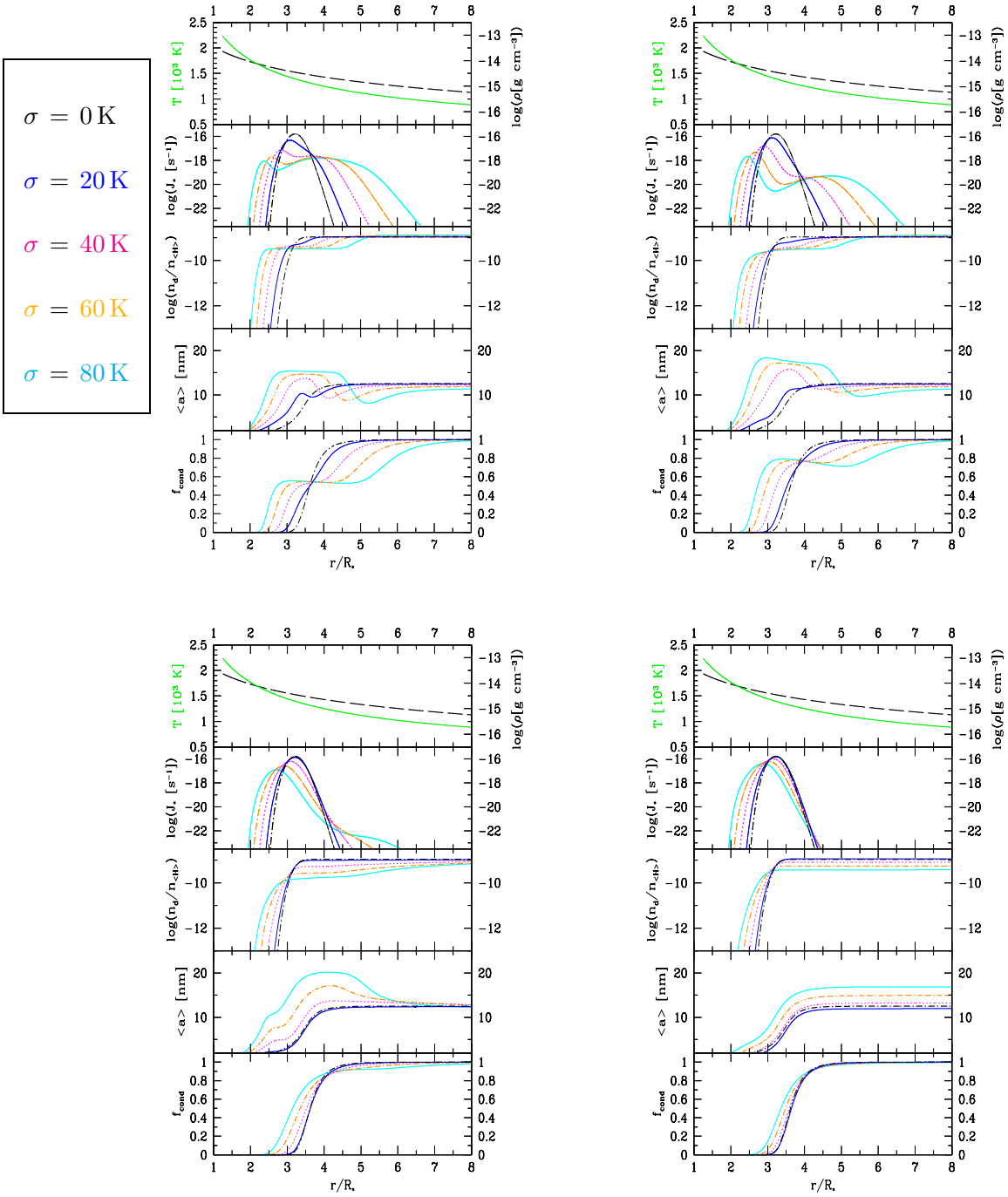


Abbildung B.2: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Standardabweichungen σ der Fluktuationstemperaturverteilungen und verschiedenen Korrelationslängen: oben links $\lambda = 10^4\,\mathrm{s}$; oben rechts $\lambda = 10^5\,\mathrm{s}$; unten links $\lambda = 10^6\,\mathrm{s}$; unten rechts $\lambda = 10^8\,\mathrm{s}$.

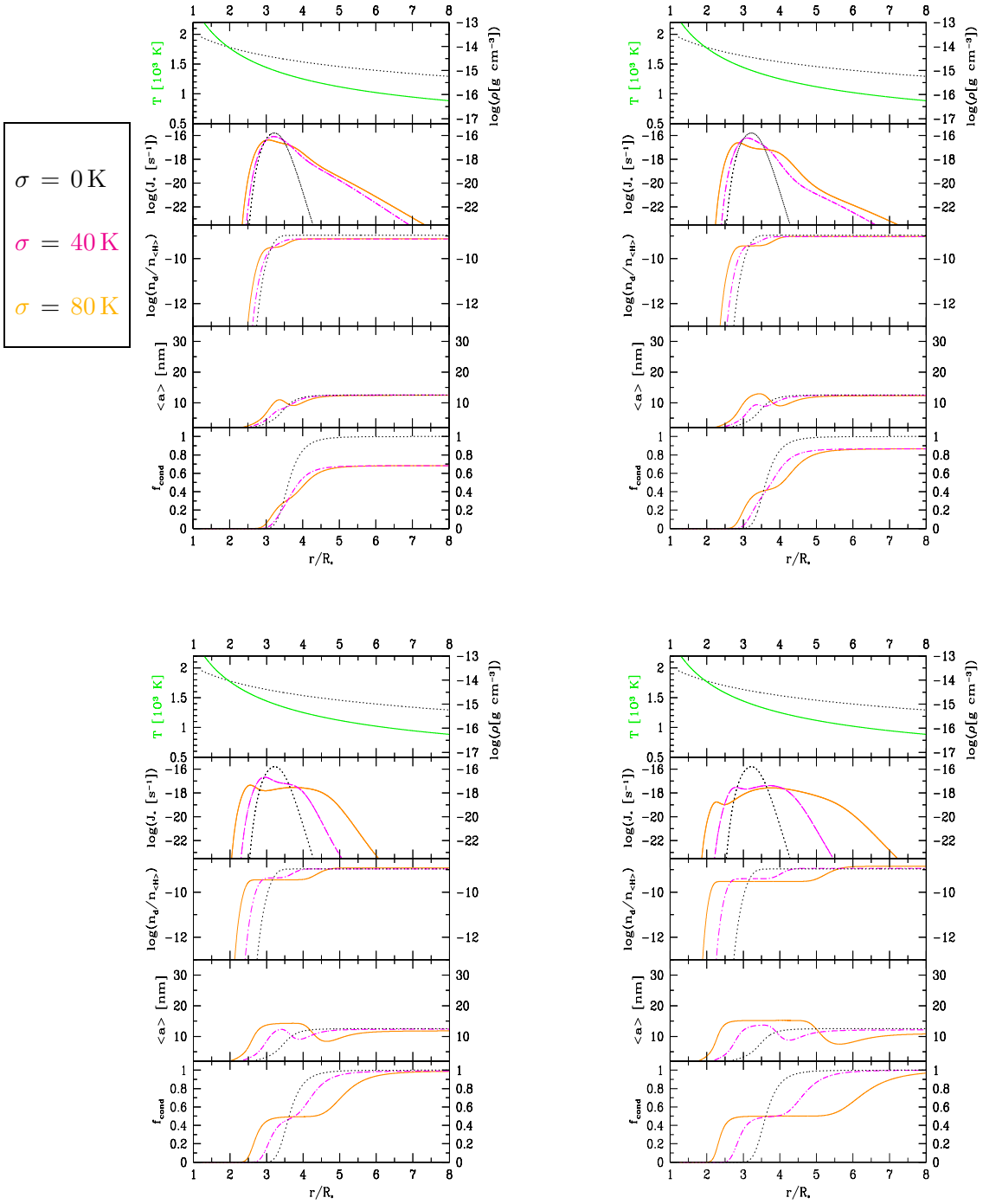
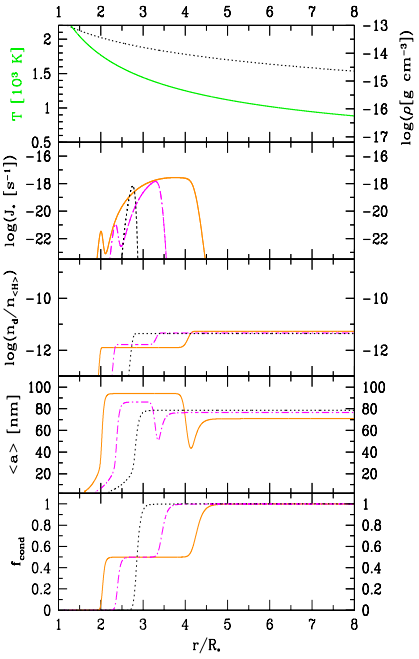


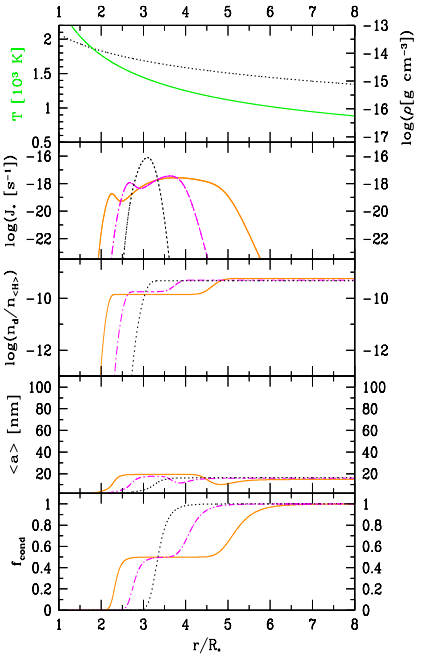
Abbildung B.3: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei verschiedenen Gaußfaktoren und variierendem σ : oben links $\gamma = 1{,}0$; oben rechts $\gamma = 1{,}5$; unten links $\gamma = 2{,}58$; unten rechts $\gamma = 3{,}89$.

$\sigma = 0\,\mathrm{K}$

$\sigma = 40\,\mathrm{K}$

$\sigma = 80\,\mathrm{K}$





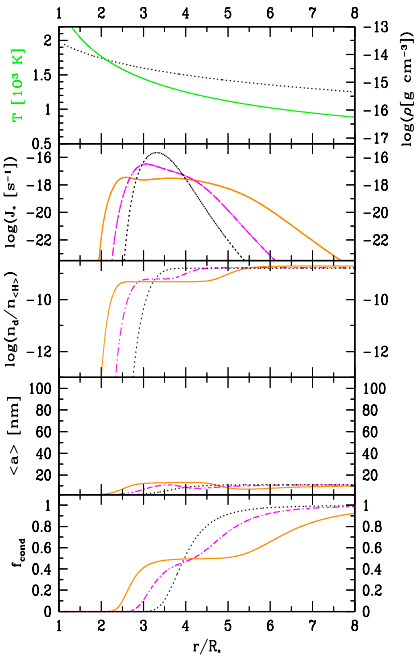


Abbildung B.4: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten und variierendem σ: oben links $v = 5$ km/s; oben rechts $v = 15$ km/s; unten links $v = 25$ km/s.

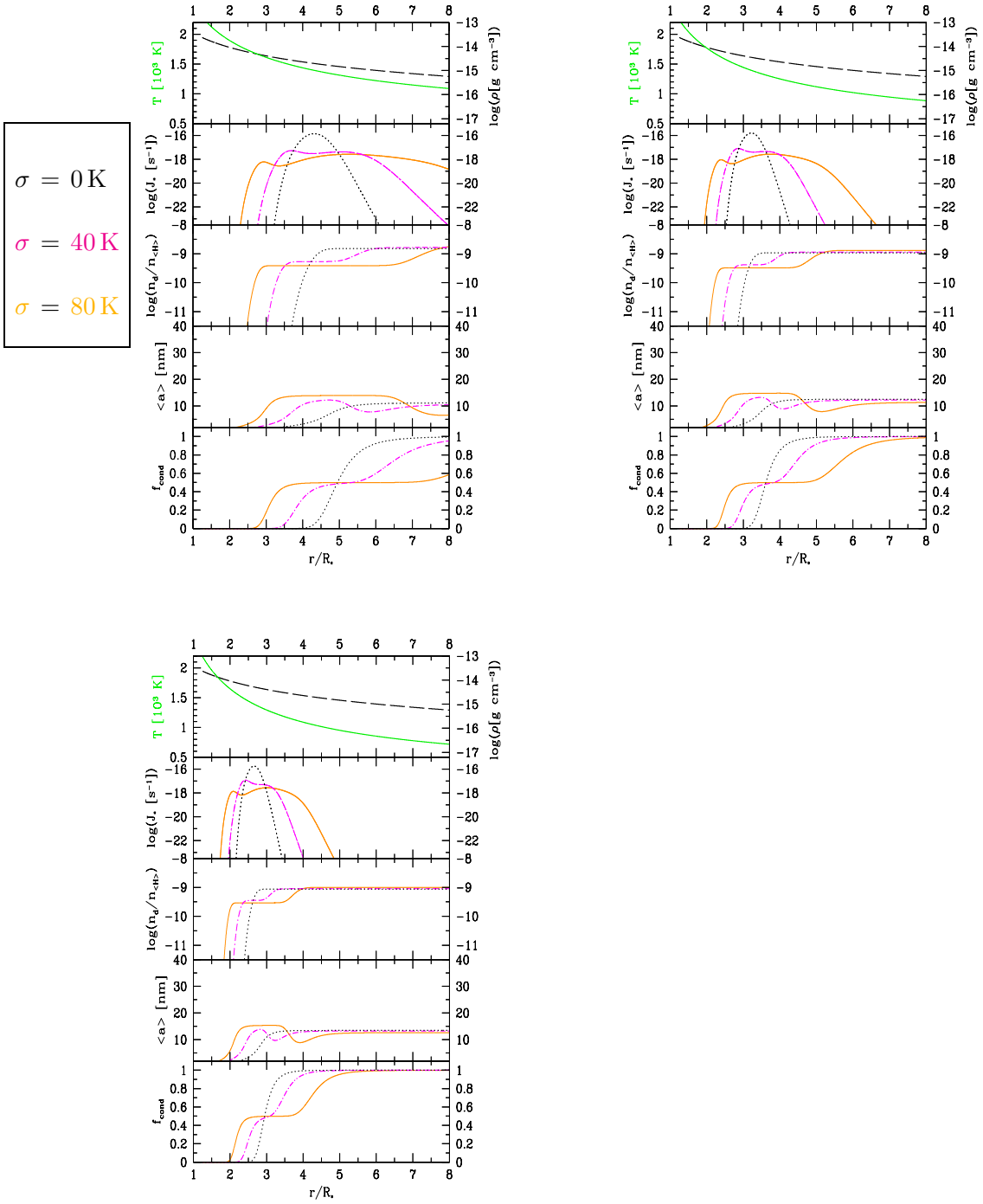
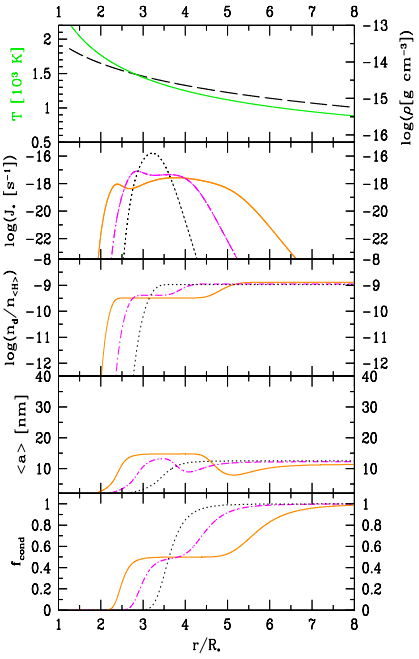


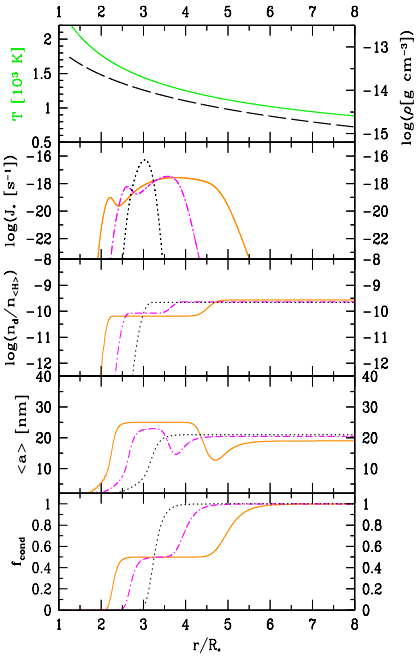
Abbildung B.5: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei verschiedenen Temperaturmittelwertkurven (vgl. (1.4)) und variierendem σ: oben links $\alpha = 0{,}4$; oben rechts $\alpha = 0{,}5$; unten links $\alpha = 0{,}6$.

$\sigma = 0\,\mathrm{K}$

$\sigma = 40\,\mathrm{K}$

$\sigma = 80\,\mathrm{K}$





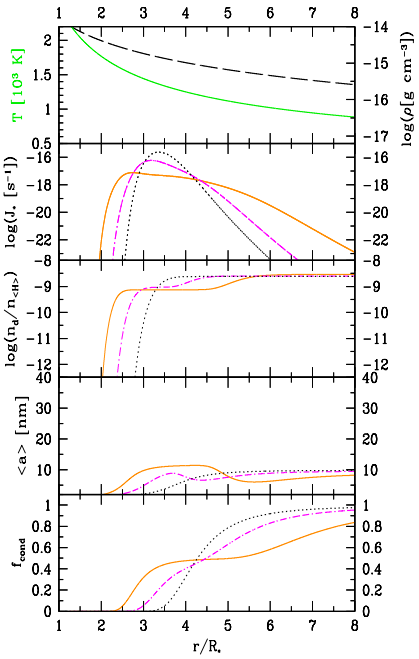


Abbildung B.6: Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei verschiedenen Massenverlustraten und variierendem σ: oben links $\dot{M} = 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{M}_\odot/\mathrm{yr}$; oben rechts $\dot{M} = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{M}_\odot/\mathrm{yr}$; unten links $\dot{M} = 9 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{M}_\odot/\mathrm{yr}$.

Abbildungsverzeichnis

6.1 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Korrelationslängen 61
6.2 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Standardabweichungen der Fluktuationstemperaturverteilungen 62
6.3 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Gaußfaktoren 63
6.4 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Windgeschwindigkeiten 65
6.5 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Temperaturmittelwertkurven 66
6.6 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Massenverlustraten 67
6.7 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei Windmodell mit ortsabhängigem Geschwindigkeitsverlauf des stellaren Windes 70
6.8 Randbedingungen 73
6.9 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei konstanter maximaler Temperaturfluktuation, aber unterschiedlichen Gaußprofilen 74

B.1 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Korrelationslängen – weitere Abbildungen . . 86
B.2 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei variierenden Standardabweichungen der Fluktuationstemperaturverteilungen – weitere Abbildungen 87
B.3 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei verschiedenen Gaußfaktoren 88
B.4 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten 89
B.5 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei verschiedenen Temperaturmittelwertkurven 90
B.6 Staubbildung und -wachstum unter Temperaturfluktuationen bei verschiedenen Massenverlustraten 91

Literaturverzeichnis

[Arnold 73] L. Arnold, Stochastische Differentialgleichungen. Theorie und Anwendung, München 1973.

[Bauer 91] H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie, 4., überarb. Aufl., Berlin / New York 1991.

[Bauer 92] H. Bauer, Maß- und Integrationstheorie, 2., überarb. Aufl., Berlin / New York 1992.

[Bellach et al. 78] J. Bellach, P. Franken, E. Warmuth, W. Warmuth, Maß, Integral und bedingter Erwartungswert, Braunschweig 1978.

[Bharucha-Reid 60] A. T. Bharucha-Reid, Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications, New York 1960.

[Bronstein et al. 81] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, dt., 21. Aufl., Leipzig 1981.

[Dirks 93] U. Dirks, Der Einfluß von Temperaturfluktuationen auf die Staubbildung in kühlen Sternatmosphären, Diplomarbeit, TU Berlin 1993.

[Doob 60] J. L. Doob, Stochastic Processes, New York 1960.

[Gail et al. 74] H.–P. Gail, E. Hundt, W. H. Kegel, J. Schmidt-Burgk, G. Traving, *Line Formation in Turbulent Media*, Astron. Astrophys. 32 (1974), 65–72.

[Gail, Sedlmayr 74] H.–P. Gail, E. Sedlmayr, *Effects of Correlated Turbulent Velocities on Photospheric Line Formation*, Astron. Astrophys. 36 (1974), 17–25.

[Gail et al. 80] H.–P. Gail, E. Sedlmayr, G. Traving, *Line Formation in Random Velocity Fields*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 23 (1980) 267–284.

[Gail et al. 84] H.–P. Gail, R. Keller, E. Sedlmayr, *Dust formation in stellar winds. I. A rapid computational method and application to graphite condensation*, Astron. Astrophys. 133 (1984), 320–332.

[Gail, Sedlmayr 85] H.–P. Gail, E. Sedlmayr, *Dust formation in stellar winds. II. Carbon Condensation in stationary, spherically expanding winds*, Astron. Astrophys. 148 (1985), 183–190.

[Gail, Sedlmayr 87] H.–P. Gail, E. Sedlmayr, *Dust Formation in Stellar Winds*, in: G. E. Morfill, M. Scholer (Hgs.), Physical Processes in Interstellar Clouds, Dordrecht 1987, 275–303.

[Gail, Sedlmayr 88] H.–P. Gail, E. Sedlmayr, *Dust formation in stellar winds. IV. Heteromolecular carbon grain formation and growth*, Astron. Astrophys. 206 (1988), 153–168.

[Gauger et al. 90] A. Gauger, H.–P. Gail, E. Sedlmayr, Dust formation, growth and evaporation in a cool pulsating circumstellar shell, Astron. Astrophys. 235 (1990), 345–361.

[Gel'fand, Vilenkin 64] I. M. Gel'fand, N. Y. Vilenkin, Generalized Functions, Vol. 4, Applications of Harmonic Analysis, New York 1964.

[Kippenhahn et al. 75] R. Kippenhahn, C. Möllenhoff, Elementare Plasmaphysik, Mannheim / Wien / Zürich 1975.

[Kolmogorov 31] A. Kolmogorov, *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Ann. 104 (1931), 415–458.

[Landau, Lifschitz 87] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. V, Statistische Physik, Teil 1, 8. Aufl., Berlin 1987.

[Landau, Lifschitz 91a] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. VI, Hydrodynamik, 5. Aufl., Berlin 1991.

[Landau, Lifschitz 91b] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. VIII, Elektrodynamik der Kontinua, 5. Aufl., Berlin 1991.

[Landau, Lifschitz 92] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. IX, Statistische Physik, Teil 2, 4. Aufl., Berlin 1992.

[Mihalas, Mihalas 84] D. Mihalas, B. W. Mihalas, Foundations of Radiation Hydrodynamics, New York / Oxford 1984.

[Morton, Mayers 94] K. W. Mayers, D. F. Mayers, Numerical Solution of Partial Differential Equations, Cambridge 1994.

[Risken 89] H. Risken, The Fokker-Planck-Equation. Methods of Solution and Applications, Berlin / Heidelberg / New York 1989.

[Schwarz 86] H. R. Schwarz, Numerische Mathematik, Stuttgart 1986.

[Sedlmayr, Dominik 95] E. Sedlmayr, C. Dominik, *Dust Driven Winds*, Space Sci. Rev. 73 (1995), 211–272.

[Sedlmayr, Winters 97] E. Sedlmayr, J. M. Winters, *Cool Star Winds and Mass Loss: Theory*, in: J. P. De Greve, R. Blomme, H. Hensberge (Hgs.), Stellar Atmospheres: Theory and Observations. Lectures Held at the Astrophysics School IX, Organized by the European Astrophysics Doctoral Network in Brussels 10–19 September 1996, Berlin / Heidelberg / New York 1997, 89–132.

[Todorovic 92] P. Todorovic, An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications, New York 1992.

[Uhlenbeck, Ornstein 30] G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein, *On the Theory of the Brownian Motion*, Phys. Rev. 36 (1930), 823–841.

[Wang, Uhlenbeck 45] Ming Chen Wang, G. E. Uhlenbeck, *On the Theory of the Brownian Motion II*, Rev. Mod. Phys. 17 (1945), 323–342.

[Weigelt et al. 98] G. Weigelt, Y. Balega, T. Blöcker, A. J. Fleischer, R. Osterbart, J. M. Winters, *76 mas speckle-masking interferometry of IRC +10 216 with the SAO 6 m telescope: Evidence for a clumpy shell structure*, Astron. Astrophys. 333 (1998), L51–L54.

[Winters et al. 94] J. M. Winters, C. Dominik, E. Sedlmayr, *Theoretical spectra of circumstellar dust shells around carbon-rich Asymptotic Giant Branch stars*, Astron. Astrophys. 288 (1994), 255–272.

Curriculum Vitae

Name	Ulrich Thomas Dirks
Geburtsdatum	1. April 1966
Geburtsort	Berlin
Eltern	Dieter Dirks, Sigrid Dirks (geb. Kopanski)
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	ledig

Schulbildung

1972-1976	Grundschule (Berlin-Charlottenburg, Berlin-Wilmersdorf)
1976-1978	Vorgymnasiale Klasse
1978-1984	Walther-Rathenau-Oberschule (Grunewald-Gymnasium)
Dezember 1984	Abitur (1,0)

Studium und Abschlüsse

1985-1994	Studium der Fächer Physik, Mathematik und Philosophie an der Technischen Universität Berlin
1989-1994	Tutorentätigkeit in den Studiengängen Mathematik und Philosophie
Oktober 1990	Diplom im Fach Mathematik (mit Auszeichnung bestanden)
Februar 1994	Diplom im Fach Physik (sehr gut)
Oktober 1994	Magisterabschluß, 1. Hauptfach Philosophie (mit Auszeichnung bestanden)
	Während des Studiums Förderungen durch die Studienstiftung des deutschen Volkes und die Fritz-Ter-Meer-Stiftung.

Berufstätigkeit

1994-1999	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Philosophie, Wissenschaftstheorie, Wissenschafts- und Technikgeschichte der Technischen Universität Berlin