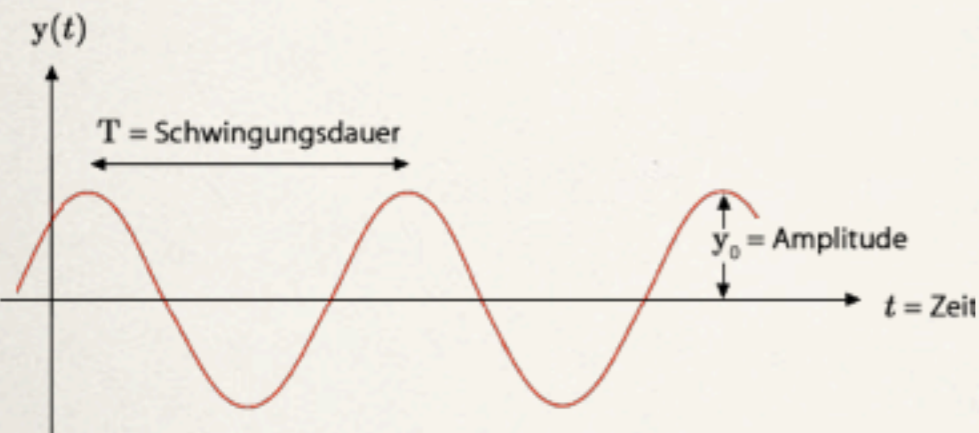


# Theoretische Grundlagen zur Astrophysik I

❖ Harmonische und gedämpfte Schwingung

❖ Saha-Gleichung

# Harmonische Schwingung



- ❖ Die Differentialgleichung (DGL) für eine harmonische Schwingung lautet (Rückstellkraft durch Feder ist gegeben durch  $F = -D x$ ):

$$m\ddot{x} + Dx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \omega_0 = \pm \sqrt{\frac{D}{m}}$$

- ❖ Man löst die DGL mit einem Ansatz:

$$x(t) = Ae^{i\omega t}$$

- ❖ eingesetzt lautet die charakteristische Gleichung:

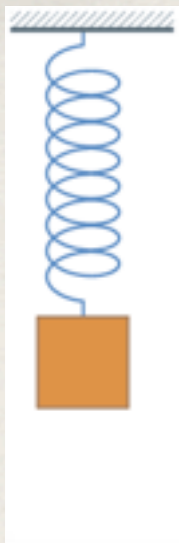
$$(\omega_0^2 - \omega^2)x = 0$$

- ❖ somit folgt als Lösung:

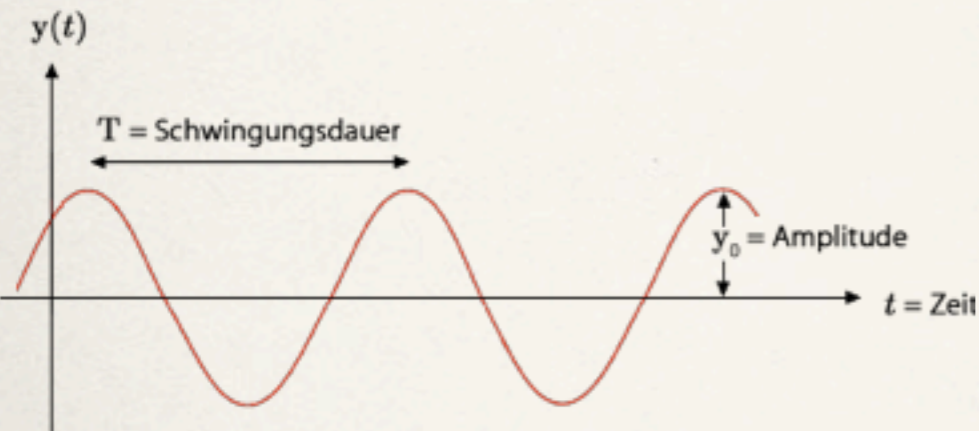
$$x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}$$

- ❖ mit den Randbedingungen  $x(t=0) = x_0$ ,  $dx/dt(t=0) = 0$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$



# Harmonische Schwingung



- ❖ Die Differentialgleichung (DGL) für eine harmonische Schwingung lautet (Rückstellkraft durch Feder ist gegeben durch  $F = -D x$ ):

$$m\ddot{x} + Dx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \omega_0 = \pm \sqrt{\frac{D}{m}}$$

- ❖ Man löst die DGL mit einem Ansatz:

$$x(t) = Ae^{i\omega t}$$

- ❖ eingesetzt lautet die charakteristische Gleichung:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x = 0$$

- ❖ somit folgt als Lösung:

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}$$

- ❖ mit den Randbedingungen  $x(t=0) = x_0$ ,  $dx/dt(t=0) = 0$

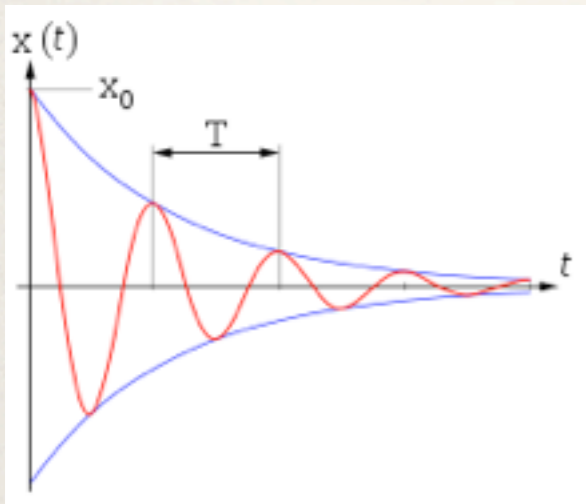
$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$

# Gedämpfte Schwingung I

- \* Differentialgleichung (DGL) der gedämpften Schwingung:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0$$

$$\ddot{x} + \gamma x + \omega_0^2 = 0$$



- \* Man löst die DGL mit einem Ansatz:  $x(t) = Ae^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega x$$

$$\ddot{x}(t) = (i\omega)^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2 x$$

- \* eingesetzt ergibt das die charakteristische Gleichung:

$$\omega^2 x + i\gamma\omega x - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = i\gamma/2 \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \equiv i\gamma/2 \pm \tilde{\omega}$$

- \* Die allgemeine Lösung lautet dann:

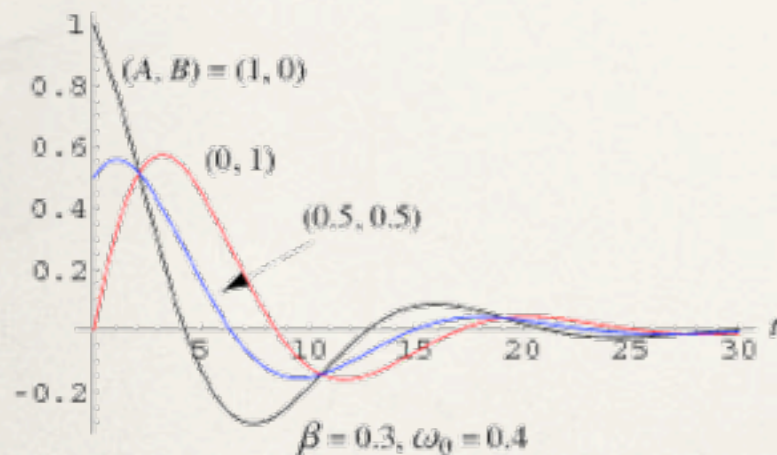
$$x(t) = e^{-\gamma/2t} (A_1 e^{i\tilde{\omega}t} + A_2 e^{-i\tilde{\omega}t})$$

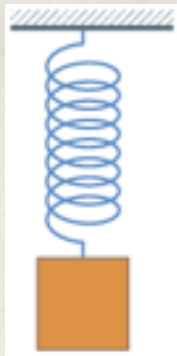
- \* Als Randbedingungen nimmt man:  $x(t=0)=x_0$ ,  $dx/dt(t=0)=0$

- \* Für schwache Dämpfung ( $\gamma < 2\omega_0$ ) lautet die Lösung:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma/2t} \left( \cos \tilde{\omega}t + \frac{\gamma}{2\tilde{\omega}} \sin \omega t \right)$$

underdamped simple harmonic motion  
( $\beta^2 - 4\omega_0^2 < 0$ )



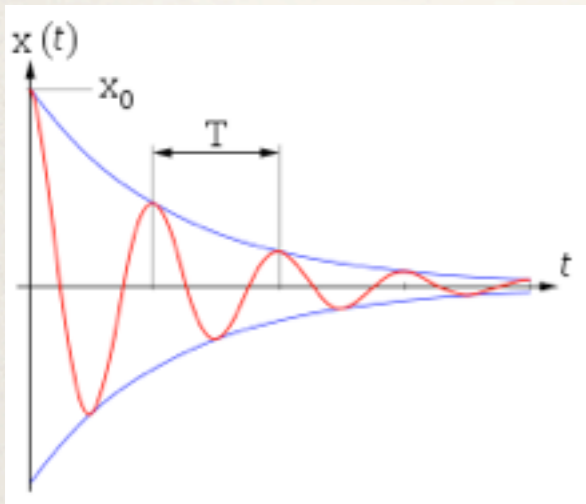


# Gedämpfte Schwingung I

- \* Differentialgleichung (DGL) der gedämpften Schwingung:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



- \* Man löst die DGL mit einem Ansatz:  $x(t) = Ae^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega x$$

$$\ddot{x}(t) = (i\omega)^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2 x$$

- \* eingesetzt ergibt das die charakteristische Gleichung:

$$\omega^2 x + i\gamma\omega x - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = i\gamma/2 \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \equiv i\gamma/2 \pm \tilde{\omega}$$

- \* Die allgemeine Lösung lautet dann:

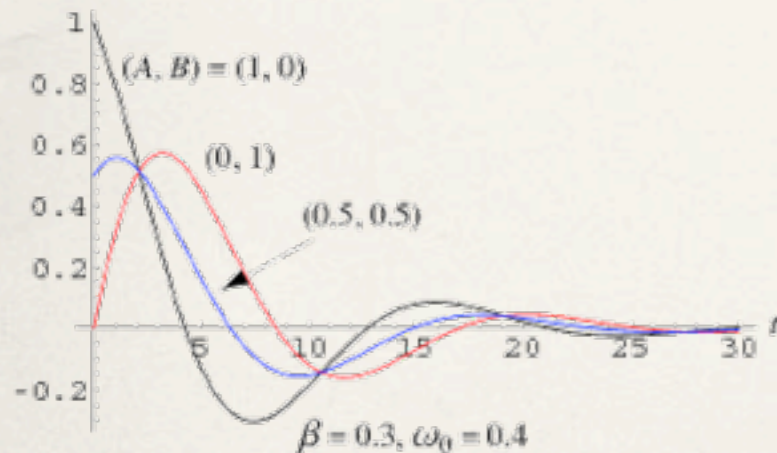
$$x(t) = e^{-\gamma/2t} (A_1 e^{i\tilde{\omega}t} + A_2 e^{-i\tilde{\omega}t})$$

- \* Als Randbedingungen nimmt man:  $x(t=0)=x_0$ ,  $dx/dt(t=0)=0$

- \* Für schwache Dämpfung ( $\gamma < 2\omega_0$ ) lautet die Lösung:

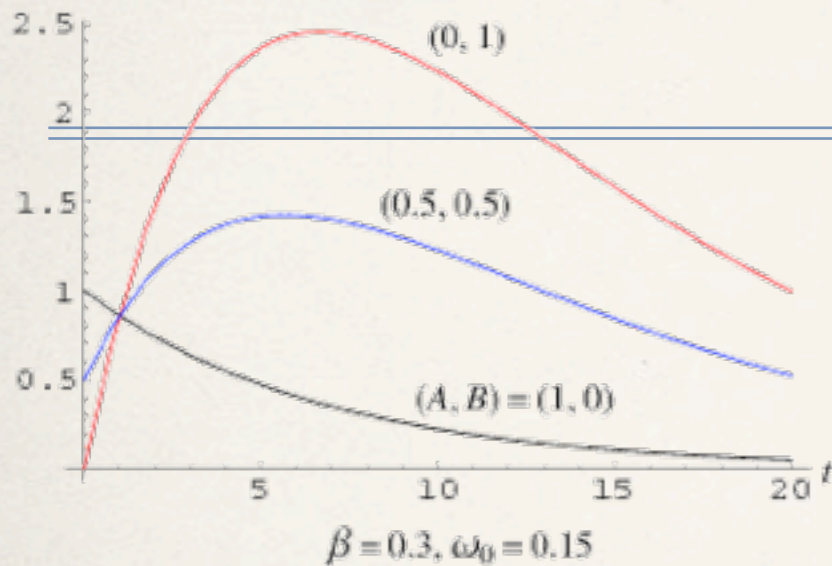
$$x(t) = x_0 e^{-\gamma/2t} \left( \cos \tilde{\omega}t + \frac{\gamma}{2\tilde{\omega}} \sin \omega t \right)$$

underdamped simple harmonic motion  
 $(\beta^2 - 4\omega_0^2 < 0)$



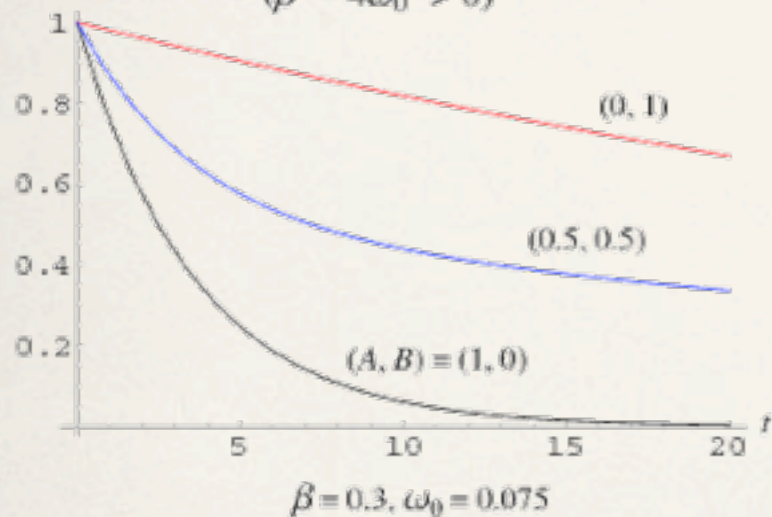
# Gedämpfte Schwingung II

critically damped simple harmonic motion  
 $(\beta = 2\omega_0)$



aperiodischer Grenzfall

overdamped simple harmonic motion  
 $(\beta^2 - 4\omega_0^2 > 0)$



Kriechfall

- ❖ Die beiden anderen Grenzfälle sind der aperiodische Grenzfall und der Kriechfall
- ❖ Der aperiodischer Grenzfall ( $\gamma=2\omega_0$ ) hat die Lösung:
- ❖ Der Kriechfall ( $\gamma>2\omega_0$ ) hat die Lösung:

$$x(t) = x_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{2} e^{-\gamma/2t} \left( \left( 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}} \right) e^{\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}t} + \left( 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}} \right) e^{-\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}t} \right)$$

# Saha-Gleichung I

- ❖ Ableitung mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung; oberes Niveau ist jetzt ein 2-Teilchen-Zustand (Ion + freies Elektron)

**Energie:**  $E = E_{\text{ion}} + p^2/2m_e$  (p=electron momentum)

**Statistisches Gewicht:**  $g = g_{\text{up}} \times G(p)$  (Gewicht des Ions x Gewicht des freien Elektrons)

Eingesetzt in Boltzmann-Gleichung  $n_j = g_j e^{-\frac{E_j}{kT}}$ , d.h.:

$$\frac{n_{\text{up}}(p)}{n_{\text{low}}} = \frac{g_{\text{up}} G(p)}{g_{\text{low}}} e^{-(E_{\text{ion}} + p^2/2m_e - E_{\text{low}})/kT}$$

$$\textcircled{R} \quad \frac{n_{\text{up}}}{n_{\text{low}}} = \frac{g_{\text{up}}}{g_{\text{low}}} e^{-(E_{\text{up}} - E_{\text{low}})/kT} \int_0^{\infty} G(p) e^{-p^2/2m_e kT} dp \quad \text{Summiere über alle Endzustände durch Integration über p}$$

Statistisches Gewicht des freien Elektrons = Anzahl der verfügbaren Zustände im Geschwindigkeits- bzw. Impulsintervall  $[p, p+dp]$  (Pauli-Prinzip):

$$G(p)dp = 2 \frac{d\Omega(p)}{h^3} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ spins} \\ \text{phase space volume} \\ \text{phase space cell} \end{array}$$

$$d\Omega(p) = dx dy dz \cdot dp_x dp_y dp_z = dV \cdot 4\pi p^2 dp = 1/n_e \cdot 4\pi p^2 dp \rightarrow G(p) = 8\pi p^2 / h^3 n_e$$

# Saha-Gleichung II

- Wir setzen wieder in die Boltzmann-Gleichung ein:

$$\begin{aligned}\frac{n_{\text{up}}}{n_{\text{low}}} &= \frac{g_{\text{up}}}{g_{\text{low}}} e^{-(E_{\text{up}} - E_{\text{low}})/kT} \int_0^{\infty} \frac{8\pi}{h^3 n_e} p^2 e^{-p^2/2m_e kT} dp \quad \text{with } x = p / \sqrt{2m_e kT} \\ &= \frac{g_{\text{up}}}{g_{\text{low}}} e^{-(E_{\text{up}} - E_{\text{low}})/kT} \frac{8\pi}{h^3 n_e} (2m_e kT)^{3/2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \\ &= \frac{g_{\text{up}}}{g_{\text{low}}} e^{-(E_{\text{up}} - E_{\text{low}})/kT} \frac{8\pi}{h^3 n_e} (2m_e kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\end{aligned}$$

$$\frac{n_{\text{up}}}{n_{\text{low}}} = \frac{2}{n_e} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^3} \right)^{3/2} \frac{g_{\text{up}}}{g_{\text{low}}} e^{-(E_{\text{up}} - E_{\text{low}})/kT}$$

- Dies ist die Saha-Gleichung für 2 benachbarte Ionisations-Zustände
- Man kann dies auch anders ausdrücken durch:

$$\frac{n_{\text{up}} n_e}{n_{\text{low}}} = f(T) = \frac{T^{3/2}}{C} \frac{g_{\text{up}}}{g_{\text{low}}} e^{-(E_{\text{up}} - E_{\text{low}})/kT} \quad C = 2.07 \times 10^{-16} \text{ K}^{3/2} \text{ cm}^3$$



# ANHANG

## 1. Relativistische Reisen

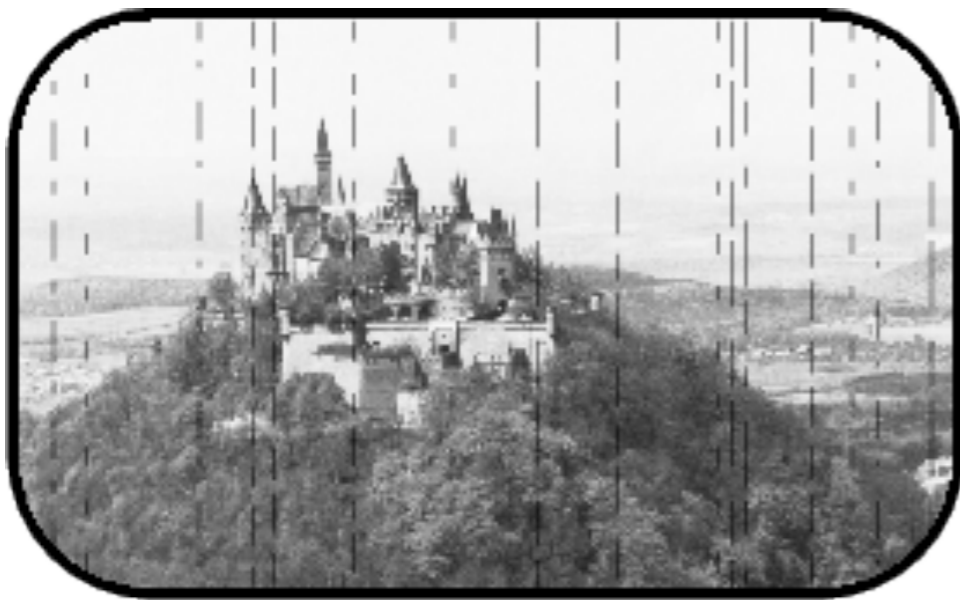
In der Speziellen Relativitätstheorie treten folgende Effekte auf:

- Längenkontraktion: nur in Bewegungsrichtung

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- Aberration: infolge endlicher Lichtgeschwindigkeit  $c$  und Bewegung mit  $v \sim c$  wird Lichtlaufzeit während der Bewegung wichtig
  - ➔ Sichtwinkel wird kleiner (“Tunnelblick”)
  - ➔ Lichtstrahlen von “hinten” treten noch ins Blickfeld (Verzerrungs- und Krümmungseffekte)
  - ➔ Aufhellung der Bildmitte durch höhere Intensität

# Aberration (klassisch)

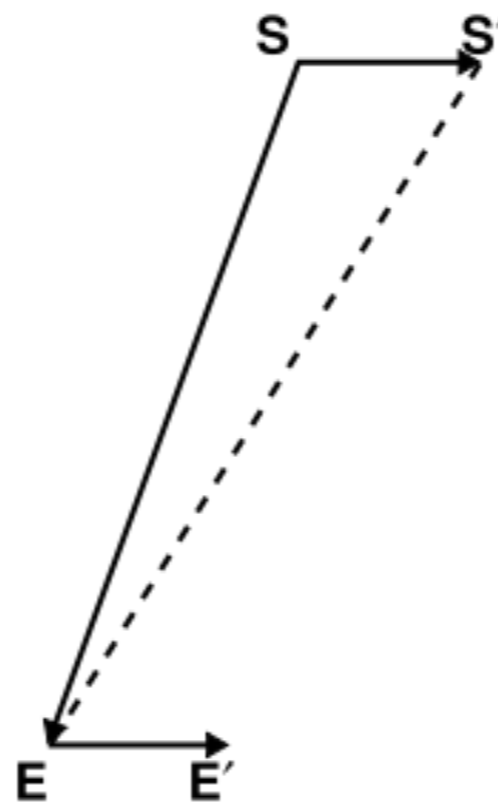


$v = 0$



$v = 80\text{km/h}$  →

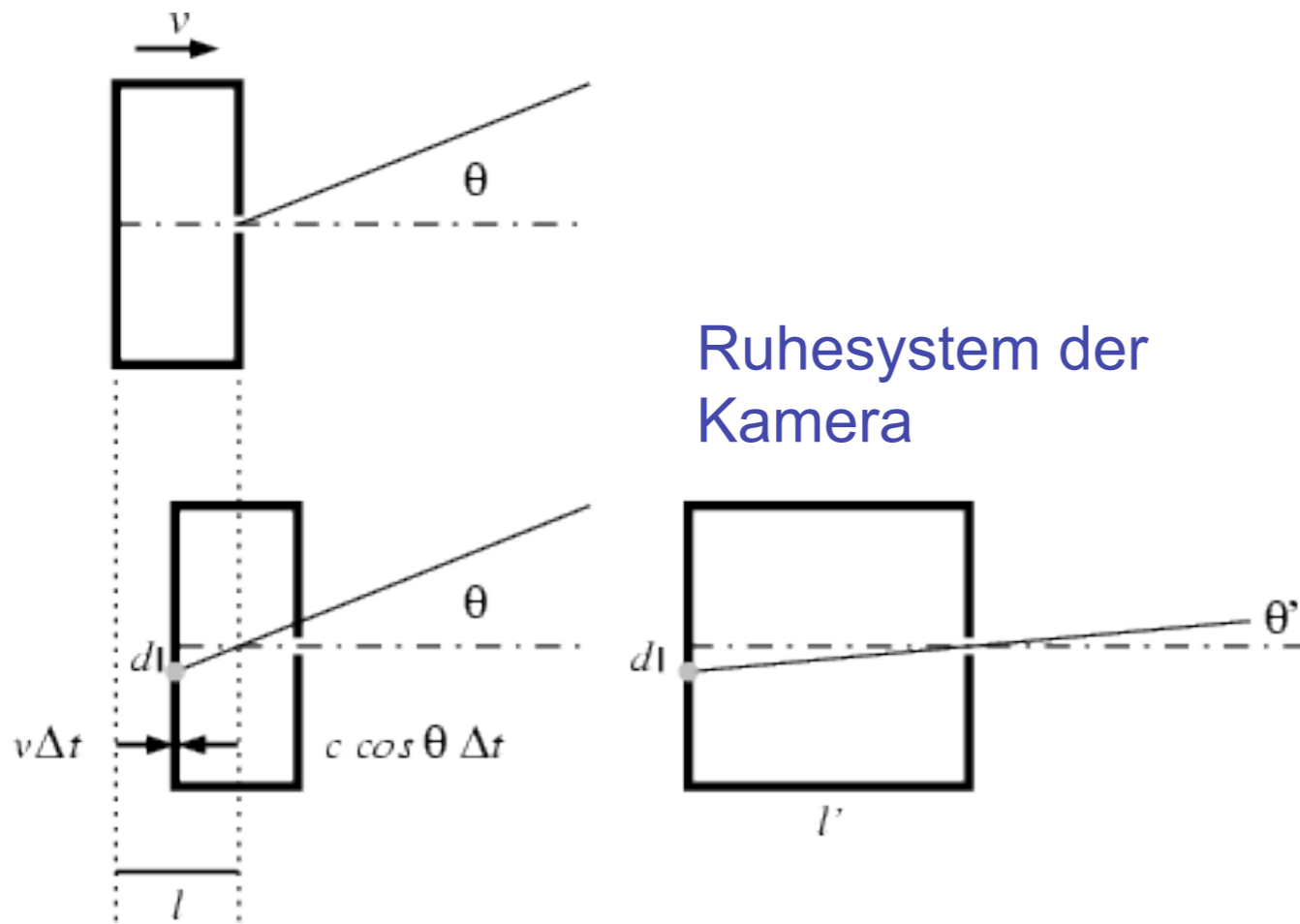
- Der Aberrationseffekt ist vertraut: Regen kommt immer von „vorn“, d.h. aus der Bewegungsrichtung
- Grund: endliche Geschwindigkeit des Signals (Regen) und Bewegung des Beobachters mit vergleichbarer Geschwindigkeit



- Licht tritt in S in das Teleskop ein und wird in E im Okular detektiert
- zwischen dem Lichtweg von Linse und Okular hat sich das Teleskop nach E' bewegt  
→ Teleskop muss um den Winkel S'ES geneigt werden

Breitschwerdt - Astronomie II

# Aberration (relativistisch)



- Lochkamera bewegt sich mit  $v \sim c$  nach rechts  $\rightarrow$  Längenkontraktion
- Photon tritt unter Winkel  $\theta$  ein und bei Entfernung  $d$  von der optischen Achse auf die Photoplatte, CCD etc.
- im Ruhesystem der Kamera schließt man von  $d$  auf einen Eintrittswinkel  $\theta'$
- es gilt für die Strecke  $l$ :

$$l = v\Delta t + c \cos\theta \cdot \Delta t = \frac{l'}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v + c \cos\theta}$$

- im Ruhesystem der Kamera trifft das Photon unter dem Winkel  $\theta'$  auf, d.h.

- in dieser Zeit hat sich Photon um  $d = c \sin\theta$  von optischer Achse entfernt

$$\tan\theta' = \frac{d}{l'} = \frac{c \sin\theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c} + \cos\theta}$$

Breitschwerdt - Astronomie II

Mit Hilfe der Identität:

$$\tan \frac{\theta'}{2} = \frac{\sin \theta'}{1 + \cos \theta'}$$

folgt:

$$\tan \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \theta' < \theta, \text{ und für } v \leq c : \theta' = \theta$$

Abb. 6 LOCHKAMERA

Das Licht, das durch die Lochblende eintritt, erzeugt auf der hinteren Wand der Lochkamera ein Bild.

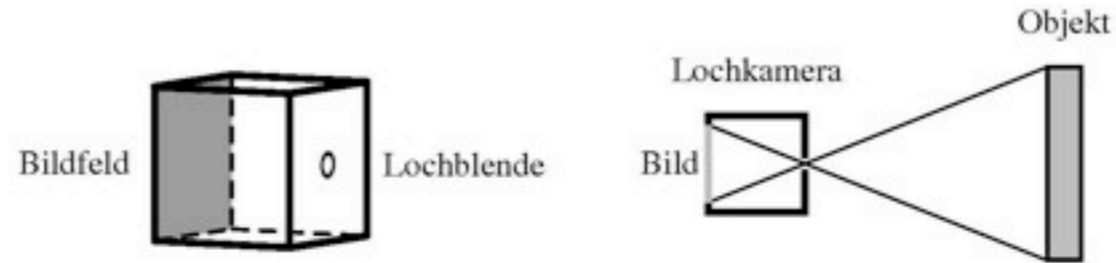


Abb. 7 Bildentstehung in einer mit  $0,9c$  bewegten Lochkamera. Zwischen dem Eintritt des Lichts durch die Lochblende (oben) und seinem Auftreffen auf das Bildfeld (unten) bewegt sich die Kamera weiter.

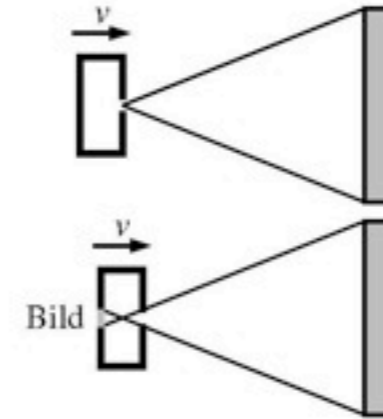


Abb. 8 Eine ruhende Kamera (links) und eine bewegte Kamera (rechts, hier bewegen wir uns mit) haben dasselbe Objekt von derselben Position aus aufgenommen. Mit wachsender Geschwindigkeit empfängt die Kamera die Lichtstrahlen von dem Objekt aus einem immer kleineren Winkelbereich.

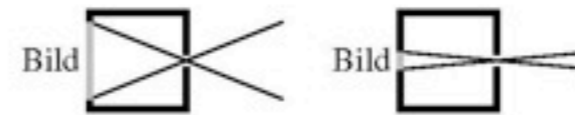
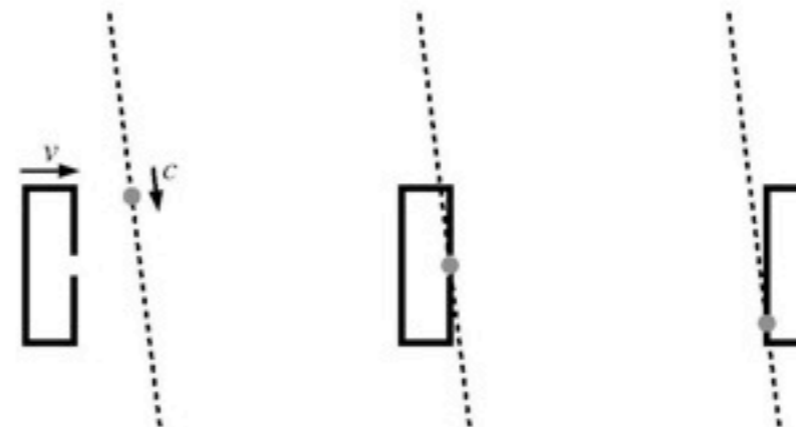


Abb. 9 Eine Lochkamera bewegt sich mit  $0,95c$ . Ein Photon, das schräg von hinten vor die Kamera läuft, kann von der Blende eingefangen und auch noch vom Bildfeld eingeholt werden. Je schneller die Kamera ist, desto weiter kann sie hinter sich schauen.



# Radeln durch Tübingen mit $c=30$ km/h



- Fahrt von links nach rechts über den Marktplatz:  $v \ll c$

- Fahrt von links nach rechts über den Marktplatz:  $v=0.9 c$
- Blick über linke Schulter

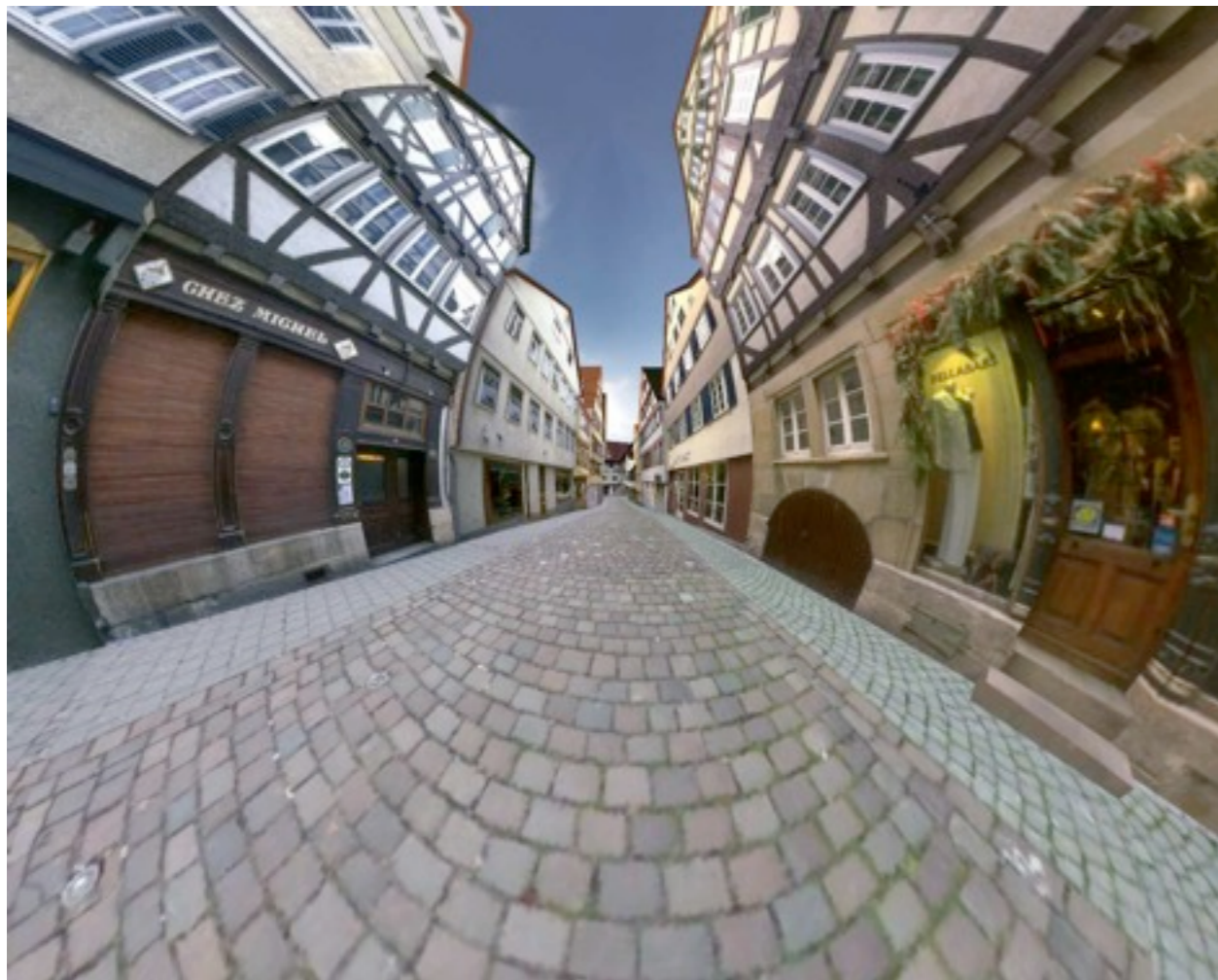
Breitschwerdt - Astronomie II



- Blick auf die Marktgasse, Richtung Stadtmuseum
- $v=0$  km/h
- Öffnungswinkel der Kamera:  $60^\circ$  vertikal und  $75^\circ$  horizontale Richtung

- gleiche Blickrichtung
- $v=0.8 c$
- ➔ Stadtmuseum verkleinert ➔ Ferne
- ➔ Neue Häuser rücken ins Blickfeld

Breitschwerdt - Astronomie II



- gleiche Blickrichtung
- $v=0.95 c$
- je schräger ein Strahl einfällt, desto länger ist er in der Kamera unterwegs
- ➔ Auftreffpunkt verschiebt sich nach Bildmitte



- gleiche Blickrichtung
- $v=0.99 c$
- ➔ Starke Verzerrung der weiter entfernten Lichtstrahlen ➔ Krümmung

Breitschwerdt - Astronomie II





- Intensität in der Bildmitte am stärksten
- Verzerrung des Spektrums durch relativistischen Dopplereffekt
- ➔ Blauverschiebung in Bewegungsrichtung

Breitschwerdt - Astronomie II

# Rundfahrt mit zunehmender Geschwindigkeit



s.a.: <http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de>

Breitschwerdt - Astronomie II