

Theoretische Grundlagen zur Astrophysik

I+II

1. Grundgleichungen der Hydrodynamik
2. Stoßwellen (Schocks)
3. Grundlagen Thermodynamik
4. Schwarzkörper-Strahlung
5. Turbulenz

1. Grundgleichungen der Hydrodynamik (HD)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = Q \quad (1) \quad Q \dots \text{Massenquellterm}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} \equiv \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \vec{F}_{ext} \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) (\rho \varepsilon) = \frac{d(\rho \varepsilon)}{dt} = \rho \Gamma - \rho^2 \Lambda, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{u} \left[\frac{1}{2} u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right] \right) + S, \quad (3')$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad (\text{adiabatisch: } \delta Q = 0) \quad (4)$$

$$T = \text{const.} \quad (\text{isotherm})$$

S ... Energieflussquelle, Γ ...Heizfunktion, Λ ...Kuehlfunktion

ε ...Energie pro Masseneinheit $\left[\frac{J}{kg} \right]$

Lösung dieser Diff. Gln. für vorgegebene Geometrie und Randbedingungen

Gradient und Divergenz

Gradient: $\vec{\nabla}\Phi \equiv \text{grad}\Phi$

Divergenz: $\vec{\nabla}\vec{A} \equiv \text{div}\vec{A}$

Φ ... stetig diffb. Skalarfkt.

\vec{A} ... stetig diffb. Vektorfkt.

• Kartesische Koordinaten:
$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

• Zylinderkoordinaten:
$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

• Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}$$

HD-Gleichungen in ebener Geometrie

- für eine ebene Strömung (1D) setzen wir:

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow x \\ \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &\rightarrow u \\ \nabla &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

- so dass für die hydrodynamischen Grundgleichungen gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = Q \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_{\text{ext}} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \right) \right] = S \quad (7)$$

- substantielle oder konvektive Ableitung: $\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \nabla)$
 $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$

HD-Gleichungen in sphärischer Geometrie

- analog für Kugelkoordinaten in sphärischer Symmetrie (1D)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) = Q$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial r} + F_{r,ext}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho u r^2 \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right) \right] = S$$

Grundlegende hydrodynamische Variablen:

ρ ... Massendichte

P ... Gasdruck

\vec{v} ... Geschwindigkeit des Gases

\vec{F}_{ext} ... externe Kraft (z.B. Gravitation)

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$... Adiabatenindex (5/3 für 1-atomiges Gas wie HI)

$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$ (Nabla-Operator in kartesischen Koordinaten)

2. Stoßwellen (Schocks)

- Schocks entstehen in kompressiblen Medien (Gasen)
- Materie wird in Bewegung gesetzt mit $u > c_s$
- lokale Schallgeschwindigkeit hängt von der Dichte ab: $c_s = f(\rho)$,
- adiabatisch: $P = A(S) \rho^\gamma \rightarrow c_s = (\gamma P / \rho)^{1/2} \sim \rho^{(\gamma-1)/2} \rightarrow$ Störungen (Schallwellen) in dichten Gebieten holen Wellen in dünneren ein
- Schocks sind **kompressiv**: Dichteerhöhung
- Schocks sind **dissipativ**: Entropieerhöhung
- Betrachte 1D-Schock (x-Richtung): $\vec{\nabla} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$
(s. Grundgln.(1)-(3) bzw. (5) - (7))
- Schock ist eine **Diskontinuität**, d.h. die Variablen ändern sich nicht zeitlich bei Durchquerung des Schocks, da Dicke der Front sehr klein (stationär): $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$
- Betrachte Erhaltungsgln. von Masse, Impuls und Energie
(s. Grundgln. (1)-(3) bzw. (5) - (7))

$$\text{aus (1): } \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx = (\rho u) \Big|_{x_1}^{x_2} = \rho_2 u_2 - \rho_1 u_1 = \text{const.} = 0$$

$$\Rightarrow \rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 \quad (\text{Massenflussdichteerhaltung})$$

$$\text{aus (2): } \rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx} \quad (2')$$

$$\text{aus: } \frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \Rightarrow \rho \frac{du}{dx} + u \frac{d\rho}{dx} = 0 \Leftrightarrow \rho u \frac{du}{dx} + u^2 \frac{d\rho}{dx} = 0$$

$$\text{da: } \frac{d}{dx}(\rho u^2) = u^2 \frac{d\rho}{dx} + 2\rho u \frac{du}{dx} = \underbrace{\rho u \frac{du}{dx} + u^2 \frac{d\rho}{dx}}_0 + \rho u \frac{du}{dx} = \rho u \frac{du}{dx}$$

$$\text{eingesetzt in (2'): } \frac{d}{dx}(\rho u^2 + P) = 0 \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}(\rho u^2 + P) dx = 0$$

$$\Rightarrow \rho_1 u_1^2 + P_1 = \rho_2 u_2^2 + P_2 \quad (\text{Impulsflussdichteerhaltung})$$

Energieflussdichte eines Flüssigkeitselements: $E = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho u^2$

1. Hauptsatz der TD:

$$d\varepsilon + pdV = \delta Q = TdS \Leftrightarrow d\varepsilon = TdS - pdV$$

Def.: $V = \frac{1}{\rho}$ (spezifisches Volumen)

Innere Energie pro Masse: $[\varepsilon] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$

$$d\varepsilon = TdS - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = TdS + \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

$$\Rightarrow d(\rho\varepsilon) = \rho d\varepsilon + \varepsilon d\rho = \rho TdS + \frac{p}{\rho}d\rho + \varepsilon d\rho$$

wegen

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (\text{ideales Gas; vgl. } \gamma = \frac{5}{3}: p = nk_B T, \rho\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} p = \frac{3}{2} nk_B T)$$

$$\Rightarrow d(\rho\varepsilon) = \rho TdS + \frac{p}{\rho}d\rho + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}d\rho = \rho TdS + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}d\rho$$

Im adiabatischen Fall gilt: $\delta Q = TdS = 0$:

$$d(\rho\varepsilon) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}d\rho$$

Somit folgt aus der Energiegl. (3) für $Q=0$ (adiabatisch):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varepsilon \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varepsilon \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varepsilon \right) = 0$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varepsilon \right) = 0 \quad (\text{stationaer: } \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varepsilon \right) dx = \text{const.}$$

$$\Leftrightarrow \int d \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \int d(\rho \varepsilon) = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \int d\rho$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p = \text{const.} \Leftrightarrow \frac{1}{2} u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \text{const.}'$$

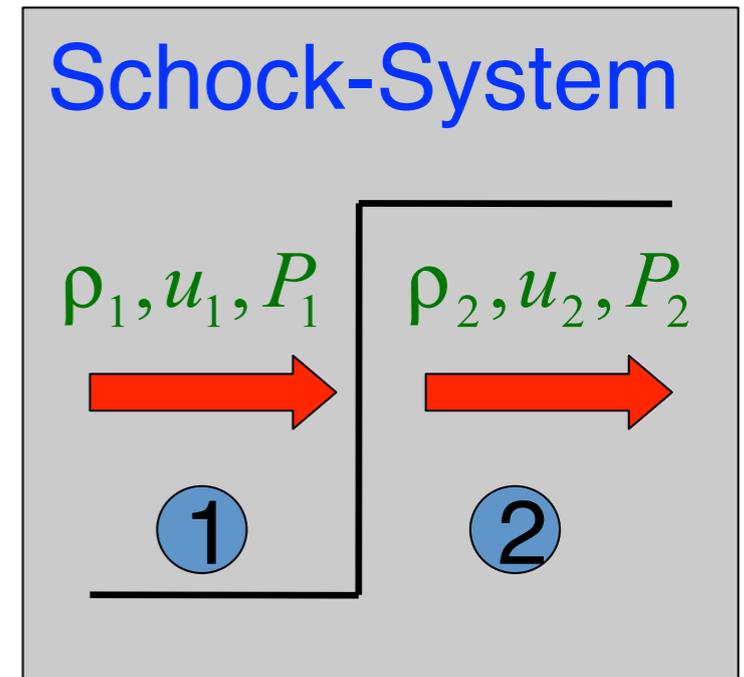
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (\text{Energieflussdichteerhaltung})$$

Sprungbedingungen über einen Stoß

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (\text{Massenfluss})$$

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (\text{Impulsfluss})$$

$$\frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_2}{\rho_2} \quad (\text{Energiefluss})$$



Rankine-Hugoniot-Bedingungen

- Definiert man die **Machzahl** $M = u / c$, $c = (\gamma P / \rho)^{1/2}$ ist die adiabatische Schallgeschw. für ein ideales Gas, u die Strömungsgeschw., so kann man die Rankine-Hugoniot-Bedingungen in M umschreiben; dies geschieht mittels trivialer algebraischer Umformungen, bedarf aber etwas Geduld und kostet etwas Mühe (probieren Sie es aus!)

Shock-Modell: Burgers Gleichung

- Betrachte die **Euler-Navier-Stokes** Gl. für druckloses Gas; es sei $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}; \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}; u = u(x, t) \quad \text{Burgers Gleichung}$$

- betrachte nichtviskosen Fall: $\nu = 0$
- quasilinear hyperbolische PDE, die mit Methode der Charakteristiken gelöst wird
- Anfangsbedingung (z.B. Welle der Form):

$$u(x, 0) = \exp[-4(x - 1)^2]$$

$$\frac{dx}{dt} = u; \frac{du}{dt} = 0$$

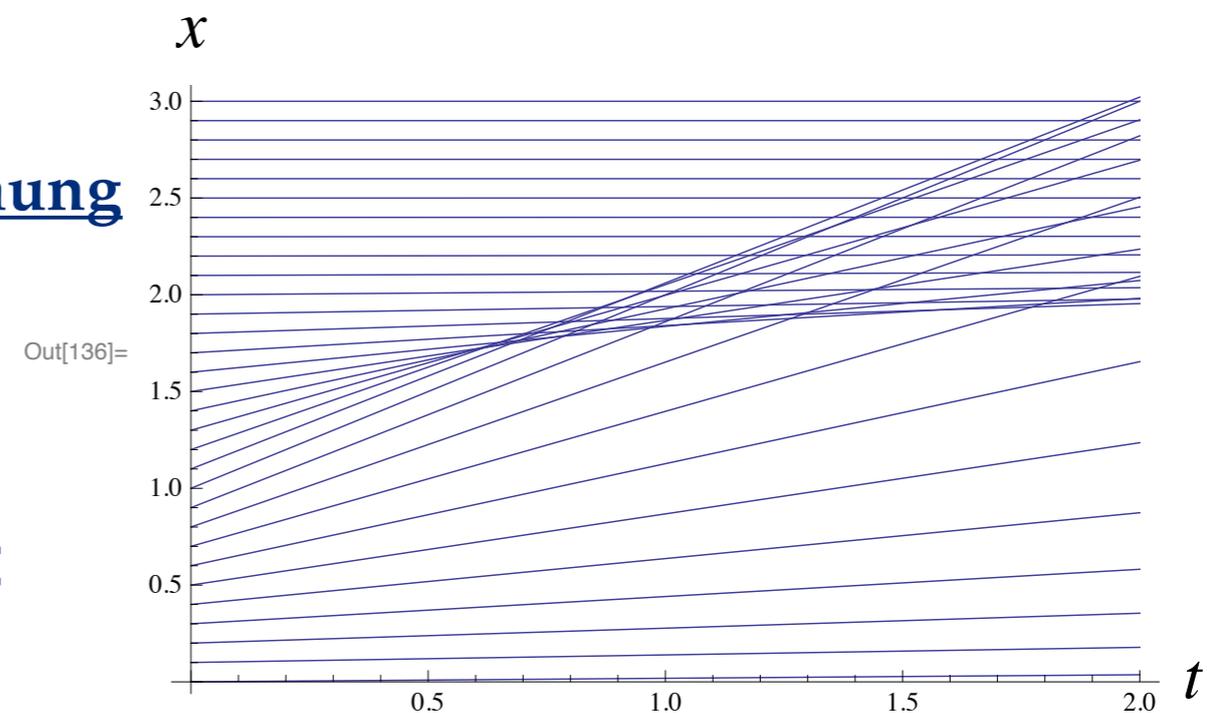
- Charakteristiken sind Geraden, Lösung ist:

$$x(t) = x_0 + ut; u(x, 0) = u_0$$

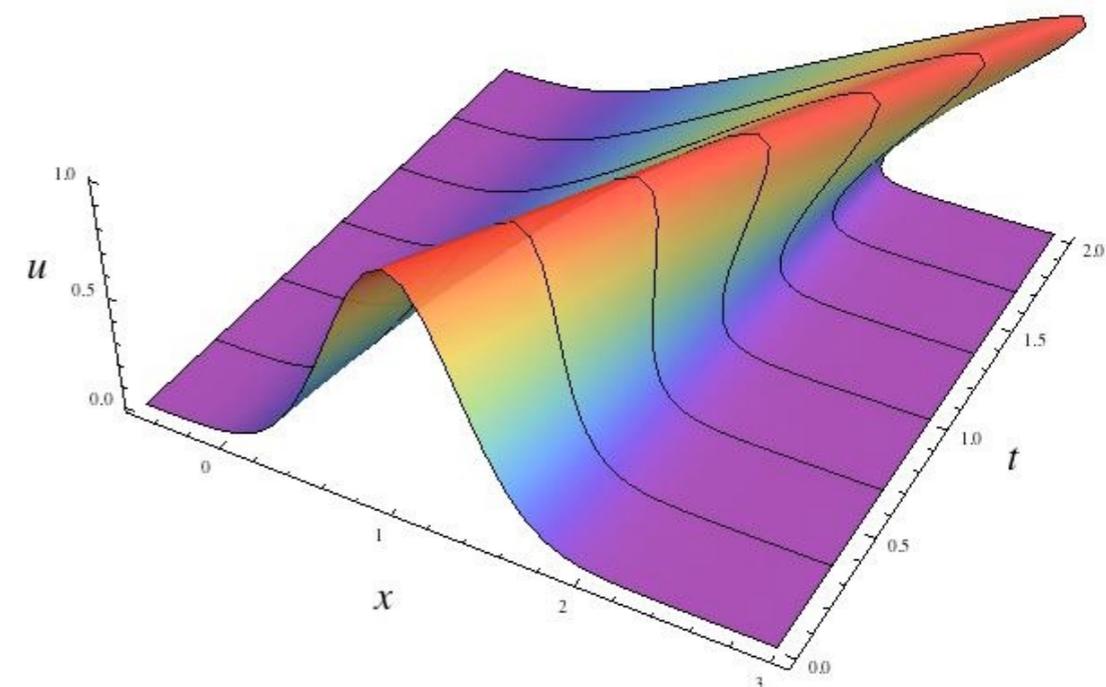
$$\implies u(x, t) = u_0(x - ut)$$

- Charakteristiken schneiden sich \rightarrow Wellenprofil wird mehrdeutig, damit unphysikalisch \rightarrow **Schock** bildet sich

Charakteristiken

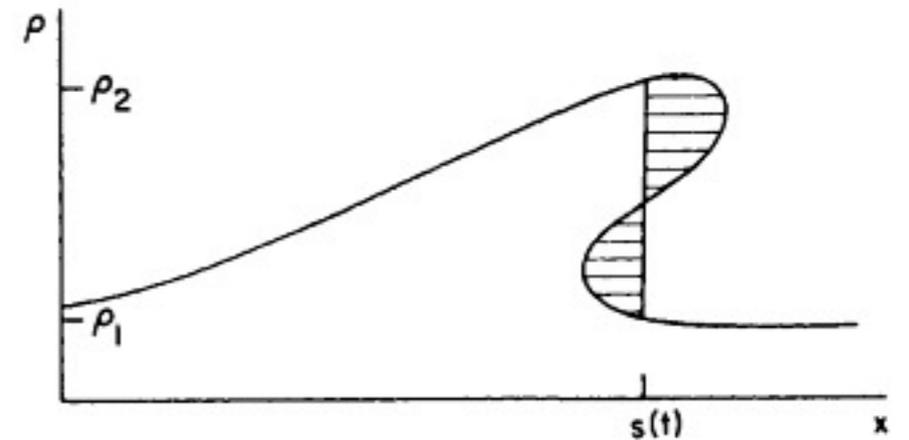


Wave Profile

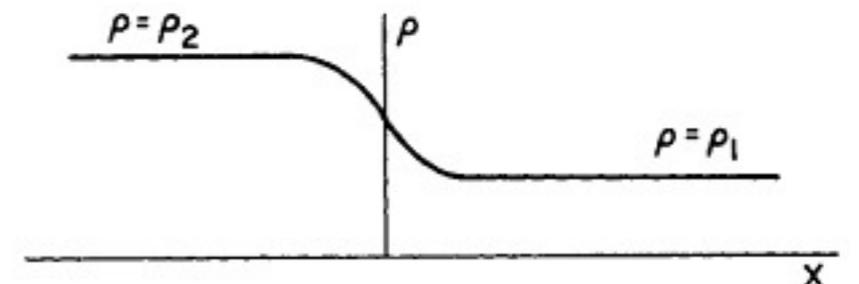


Stoßfreie Schocks

- Druckwelle, die z.B. entsteht wenn Kolben in ein Gas gedrückt wird, steilt sich auf, da Störungen bei höherer Dichte sich schneller ausbreiten: $c = c(\rho)$
- Schockdicke \ll mittlere freie Weglänge der Teilchen: **stoßfreier (collisionless) Schock**
- die Energie hinter dem Schock wird durch Plasmainstabilitäten dissipiert
- Teilchen in einem magnetisierten Medium bewegen sich mit hoher Geschw. \rightarrow Anregung von sog. Alfvén-Wellen (Störungen im Magnetfeld) \rightarrow Induktion von großen elektrischen Strömen \rightarrow Induktion von kleinskaligen Magnetfeldern \rightarrow lenken geladene Teilchen auf ihrem Weg ab \rightarrow Randomisierung der Teilchenorbits \rightarrow Schock-Dissipation

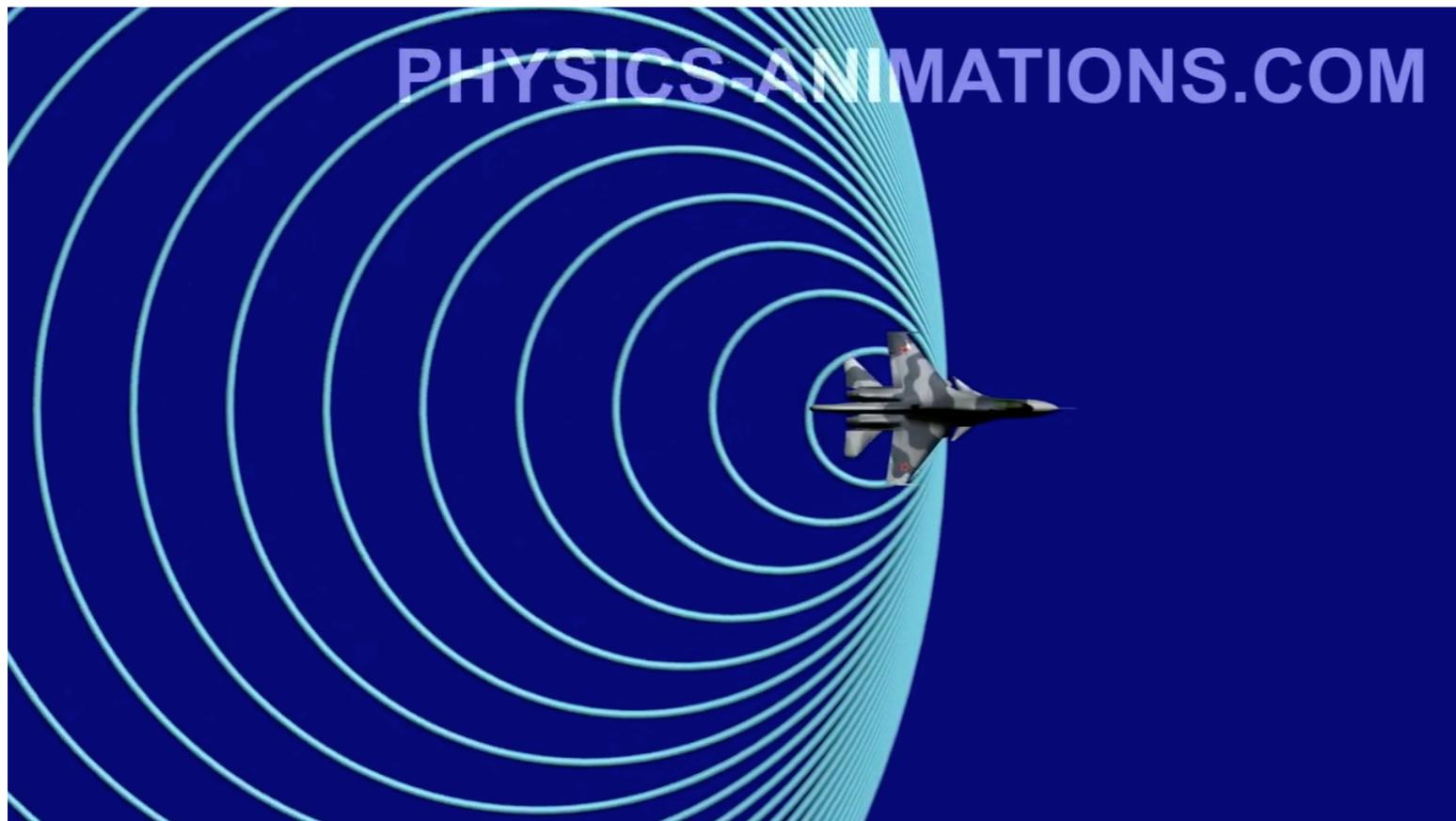


Schallwellen steilen sich zu Schocks auf wegen der Nichtlinearität der Euler-Gln.: Schallgeschwindigkeit hängt von der lokalen Dichte ab; für adiabatisches Gas gilt: $P = A(S) \rho^\gamma$; $c^2 = \gamma P/\rho \rightarrow c(\rho) \sim \rho^{(\gamma-1)/2}$



Schock Struktur

Beispiel zur Entstehung einer Schockwelle



1. Flugzeug bewegt sich mit $v < c_s$
2. $v = c_s$ ("Aufsteilen" der Wellen)
3. $v > c_s$: Schockfront, "Machkegel"

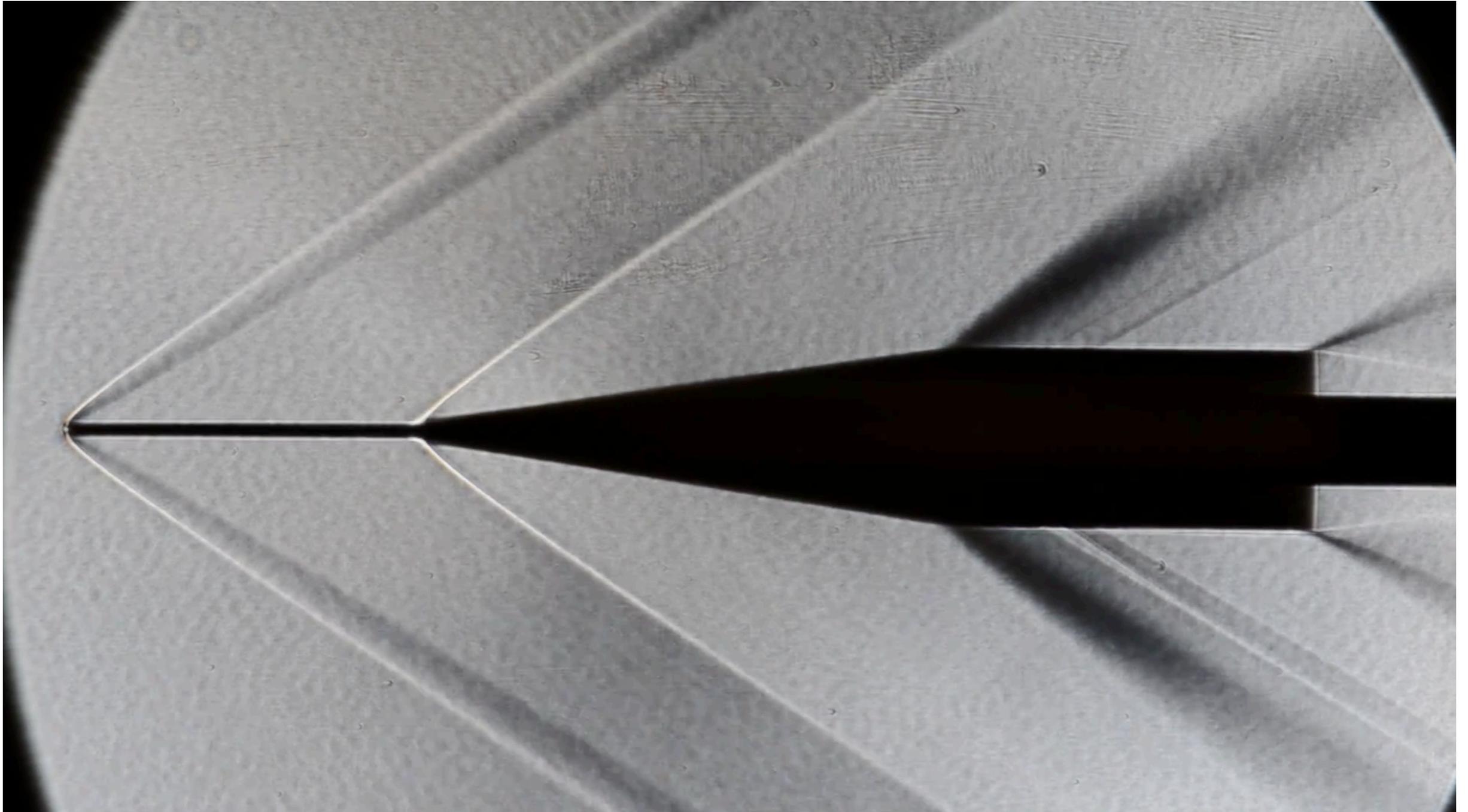
ideales Gas (adiabatisch): $P = A(S) \rho^\gamma$

$$\begin{aligned} c_s(\rho) &= \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S} \\ &= \sqrt{A(S) \gamma \rho^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

→ nachfolgende Wellen holen vorauslaufende Wellen ein ("Aufsteilen")

- **Doppler-Effekt:** entsteht durch die Bewegung einer Schall- bzw. Lichtquelle
→ bewegt sich Quelle auf Beobachter zu, dann erhöht sich die Zahl der Wellenberge(täler) und damit die Frequenz, umgekehrt, wenn sich die Quelle wegbewegt, nimmt die Frequenz ab
- Wellenberge(täler) bewegen sich mit Schallgeschwindigkeit c_s durch den Raum → bewegt sich die Quelle schneller als c_s , dann hat die Materie keine Zeit mehr das Hindernis zu umströmen und wird komprimiert → **Stoßwelle** entsteht

Schlierenphotographie von Schocks



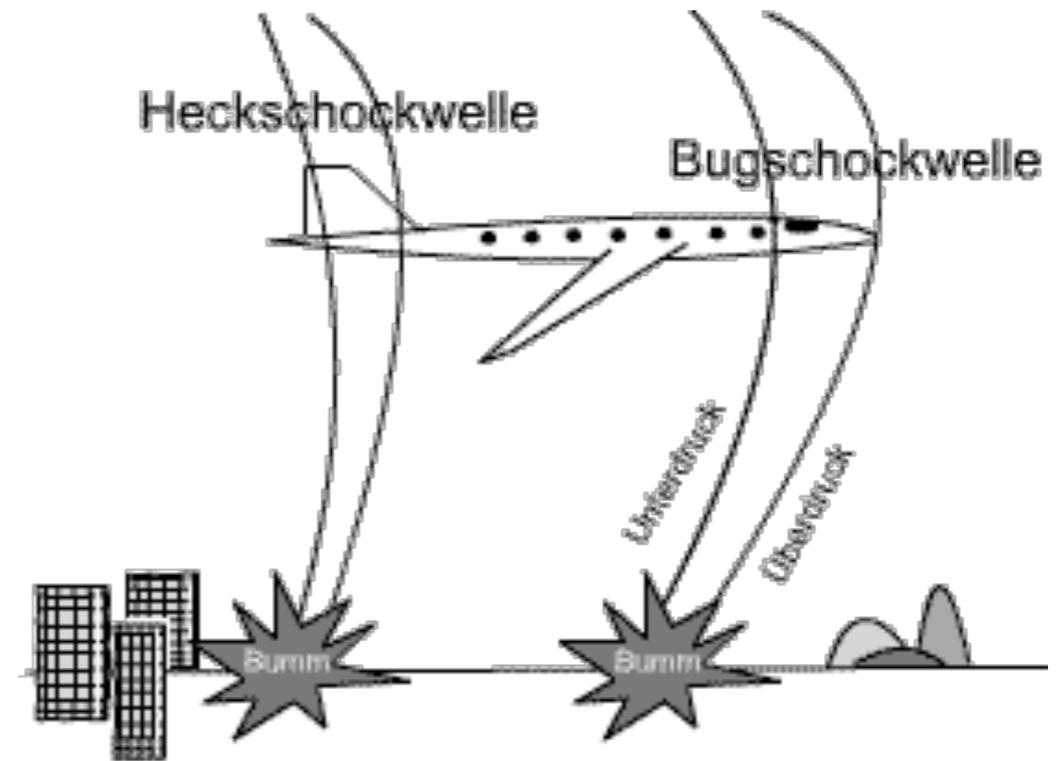
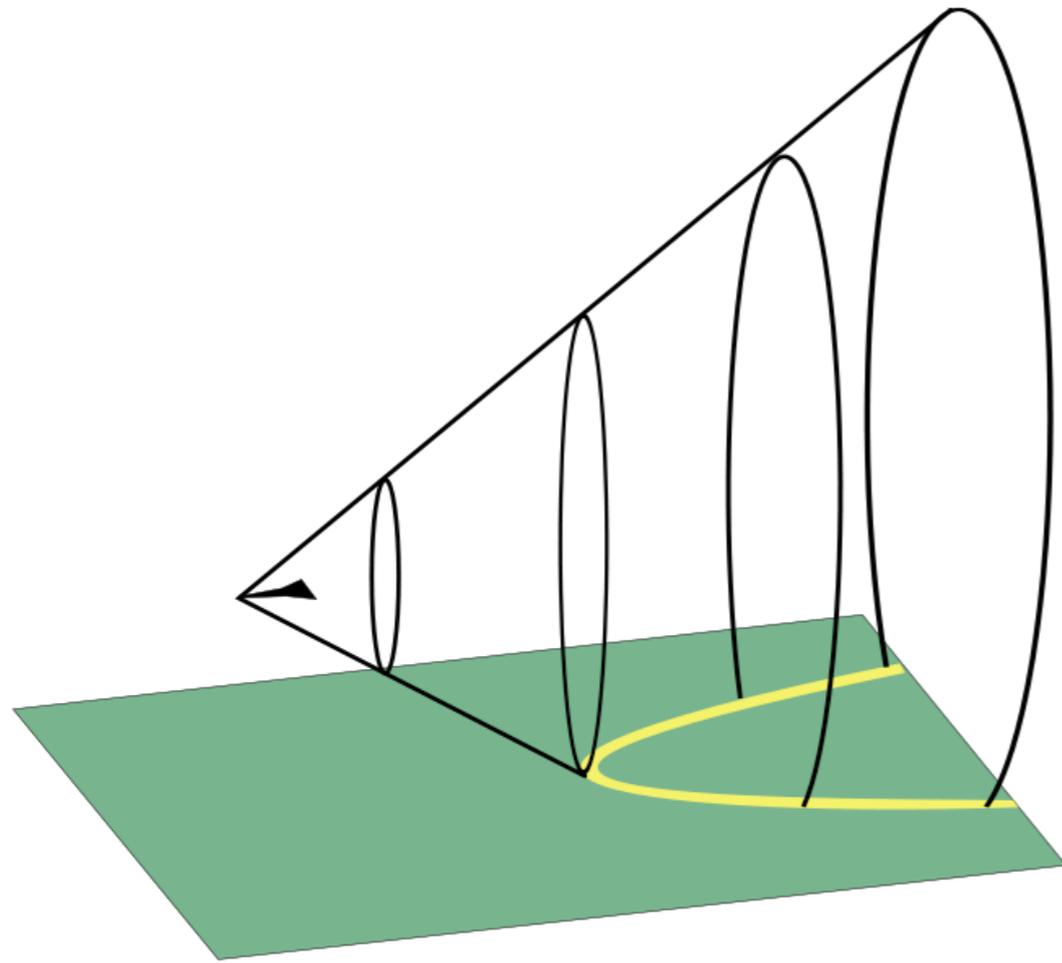
- Entstehung von Schockwelle im Windtunnel
- Objekt bewegt sich mit Überschall → Bildung eines Machkegels
- **Schlieren**-Technik: mit einer Linse kollimiertes Licht wird auf das Objekt oder von hinten angestrahlt → Dichteänderungen im Gas führen zu Änderungen im Brechungsindex → Änderungen in der Lichtintensität (hell/dunkel)

Entstehung einer Schockwelle "Sonic Boom" I



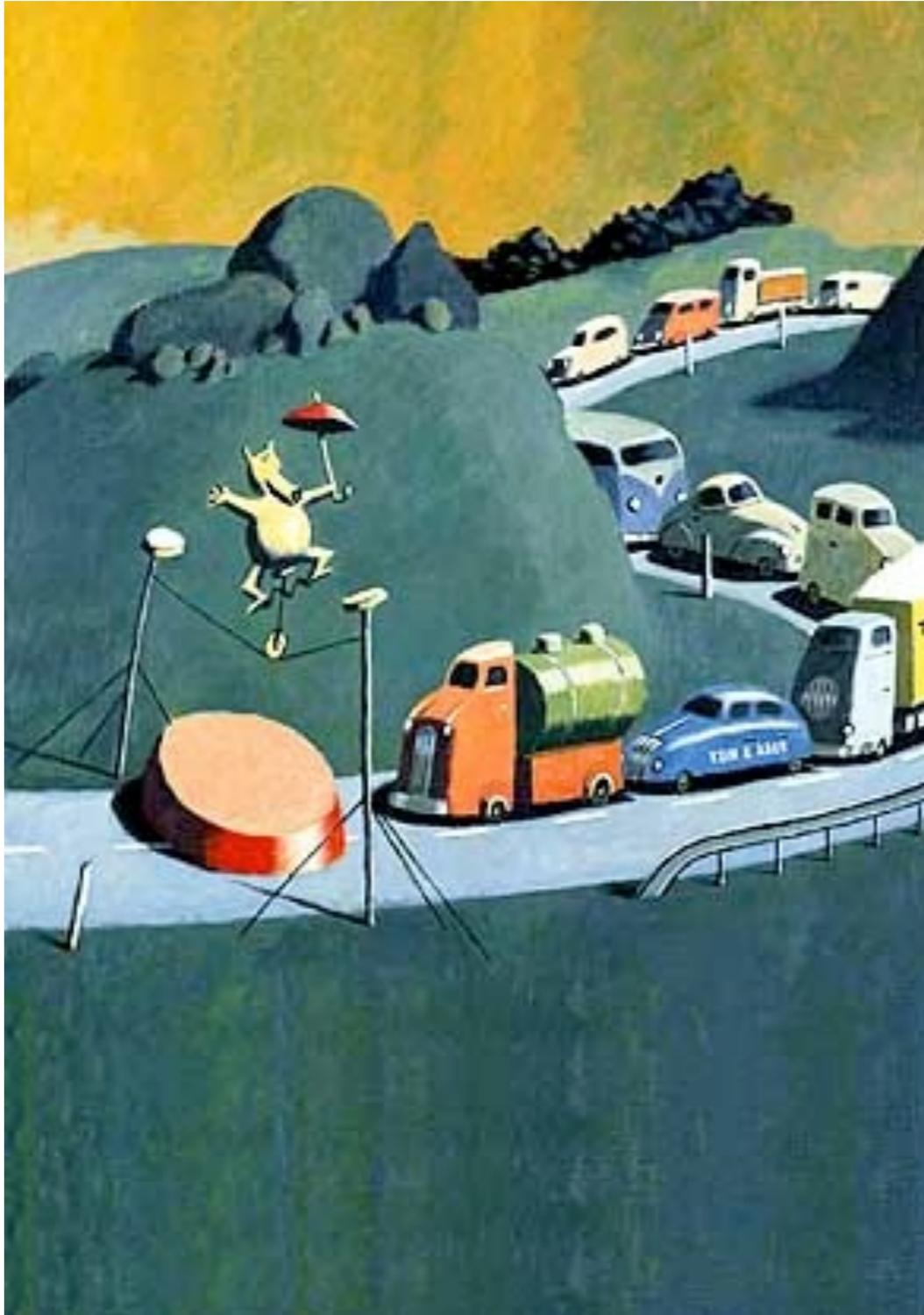
- Schallgeschwindigkeit beträgt ca. 340 m/s auf Meereshöhe
- v nimmt zu bei Umströmung eines Hindernisses wie Tragfläche \rightarrow es entsteht ein Unterdruck ("Bernoulli-Effekt"): $P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$
- Druck und Temperatur nehmen mit zunehmender Anströmgeschw. v ab
- Temperaturabnahme fördert Kondensation von Wassertröpfchen in Luft

Entstehung einer Schockwelle "Sonic Boom" II



- der Überschallknall besteht eigentlich aus 2 Knalls, nämlich vom Heck und vom Bug des Jets
- sie folgen sehr kurz aufeinander, für eine Boeing 747 wäre das Intervall (je nach Sichtwinkel) $\Delta t \sim L/c_s$; falls $L = 70 \text{ m}$, $c_s = 340 \text{ m/s} \rightarrow \Delta t \leq 0.2 \text{ s}$

Wie der berühmte Stau aus dem "Nichts" entsteht:



Oder gibt es eine
physikalische
Erklärung dafür?

Analoga

1. Verkehrsstau:

„Schallgeschw.“ $c_s = \text{Abstand zwischen Fahrzeugen} / \text{Reaktionszeit} = d / \tau$

Hohe Verkehrsdichte und / oder Fahrer „pennen“ bzw. fahren zu schnell:

c_s nimmt ab!

Falls $v_{\text{car}} \geq c_s$: Schock-Welle propagiert nach hinten

Ursache für Verkehrsstaus:

Hindernisse, unangepasstes Fahren

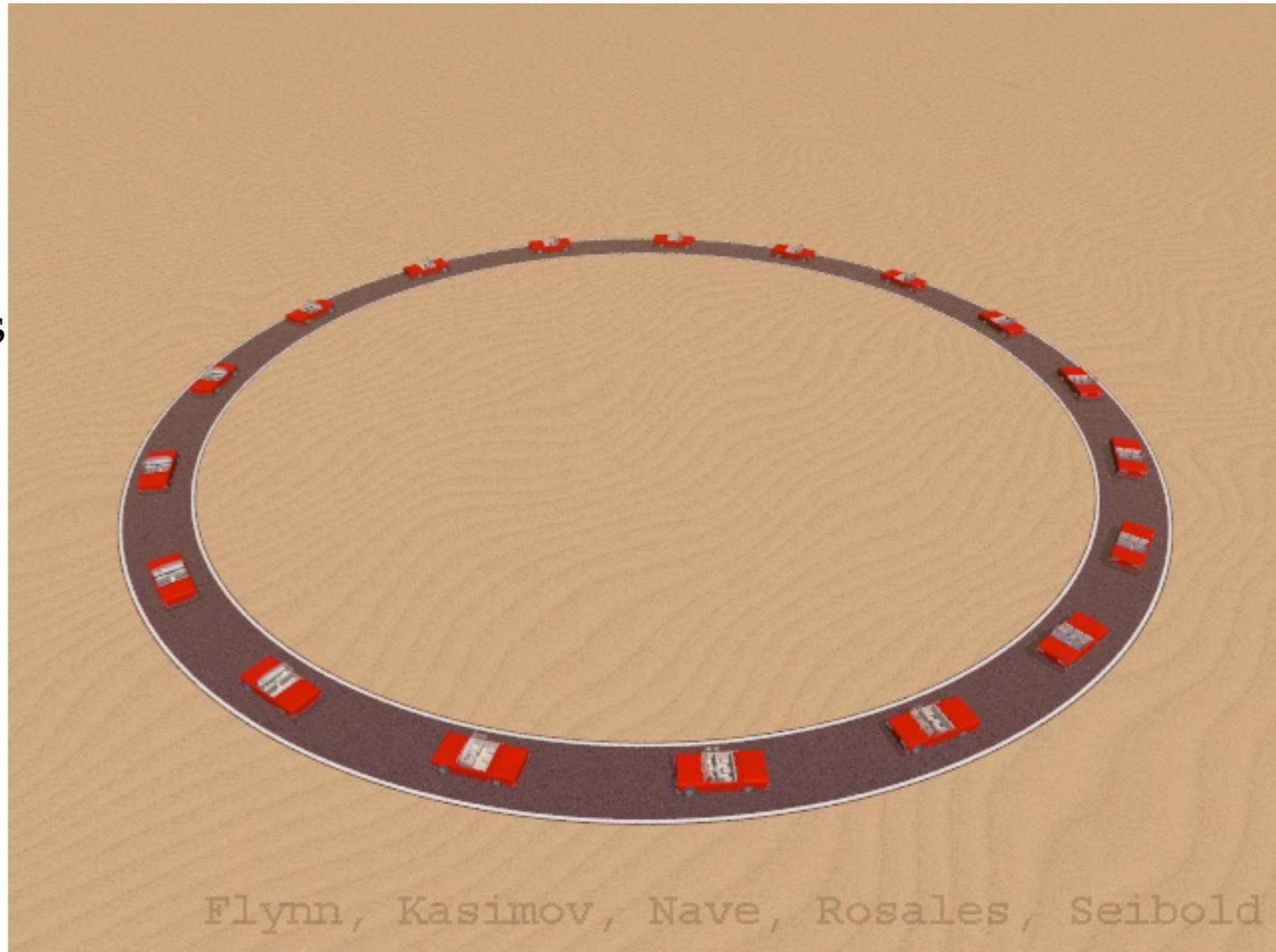
→ Erzeugung von

Störungen im Verkehrsfluss

→ „Aufsteilen“ der

Störung zu einer

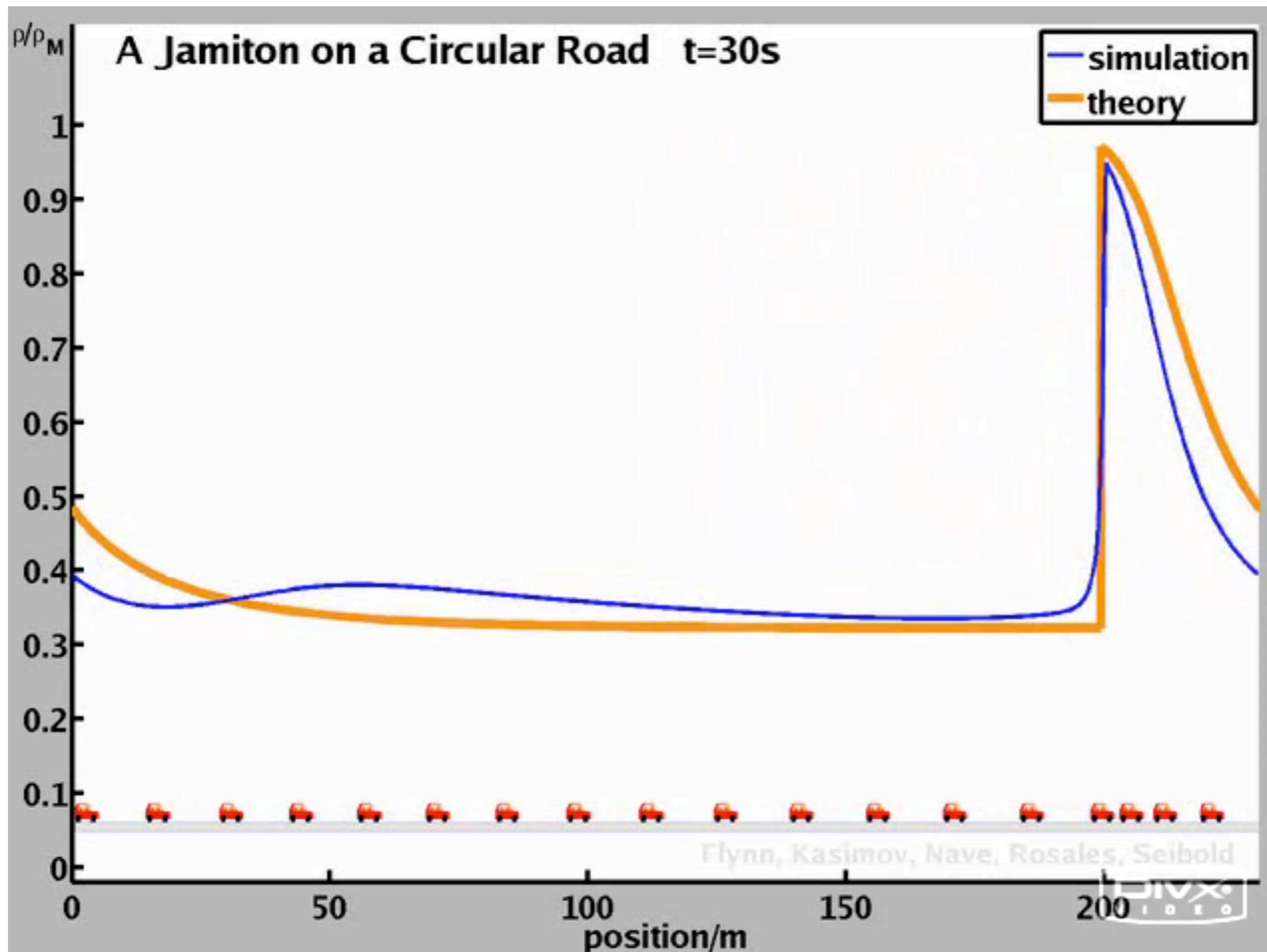
Stoßwelle



*Credit: Traffic Jam Modelling,
MIT, USA*

Flynn, Kasimov, Nave, Rosales, Seibold

Numerische Simulation



Credit: Traffic Jam Modelling, MIT, USA

- Störung pflanzt sich als Dichtewelle nach rechts fort, die sich immer mehr aufsteilt, bis eine Diskontinuität (Schock) entsteht, die bei $t \sim 70$ s stationär wird
- Zu jeder Verkehrsdichte ρ gibt es eine maximale Verkehrsdichte:
 $j_{\max} = \rho v_{\text{car}}$ und daher eine optimale Fahrzeuggeschw., so dass gilt: $dj_{\max}/d\rho = 0$,
d.h. der Verkehrsdurchsatz ist maximal!

“Realistische” Simulation



*Credit: Universität
Nagoya, Japan*

Experiment: 25 Fahrer fahren mit $v=30$ km/h im Kreis:

- zunächst fließt der Verkehr, dann aber fahren einige Autos zu **dicht** auf und überschreiten damit die Schallgeschw., d.h. $v > c = d/\tau \rightarrow$ sie müssen abrupt bremsen
- nachfolgende Fahrer müssen ebenfalls bremsen
- eine Stoßwelle pflanzt sich nach hinten mit ~ 20 km/h fort, in die nachkommende Autos fahren, ohne dass ein Verkehrshindernis sichtbar wäre (“Stau aus dem Nichts”)

2. Hydraulischer Sprung:

„Schallgeschw.“ $c_s = \sqrt{gh}$ (Theorie des „seichten Wassers“)

Experiment für den
Hausgebrauch



Gesamtdruck: P_{tot}

$$= P_{\text{ram}} + P_{\text{hyd}}$$

$$P_{\text{tot}} = \rho v^2 + \rho gh$$

Am Boden: $v > c_s$

→ Sprung in Wasserhöhe

Hinter dem Sprung gilt:

$$h_2 > h_1$$

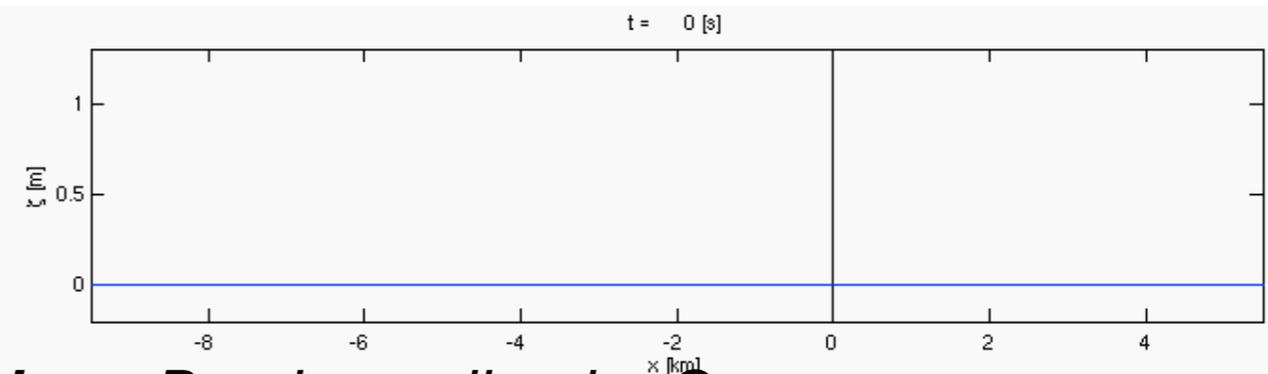
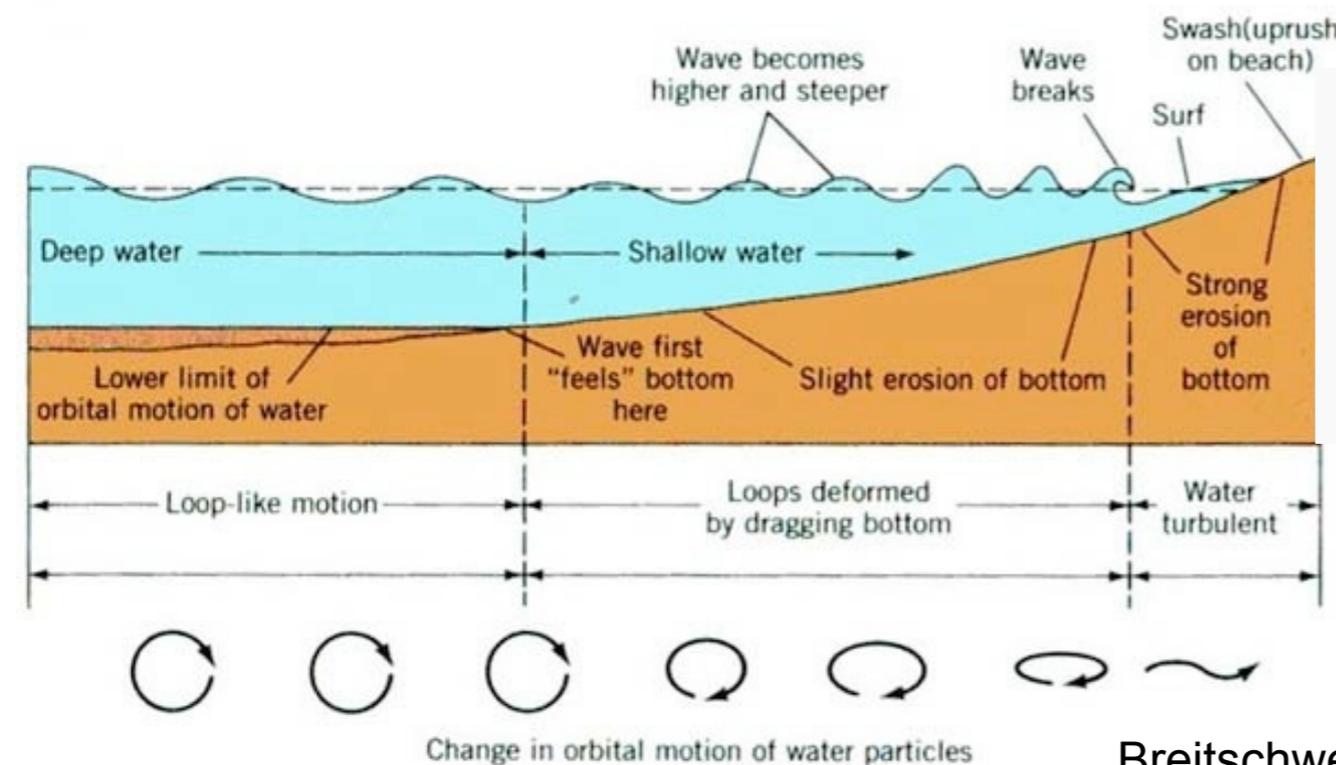
$$V_2 < V_1$$

$V_1 > c_1$ „supersonisch“

$V_2 < c_2$ „subsonisch“

Analogie: Aufsteilen von Wellen in seichtem Wasser

- In seichtem Wasser ist die Signalgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit): $c_P = (gh)^{1/2}$
- g ... Schwerebeschleunigung
- h ... Wassertiefe
- falls $v > c_P$, kommt es zu einem Aufsteilen der Wellen
- wenn Wellen in Richtung Strand einlaufen nimmt c_P ab
- nachfolgende Wellen holen vorauslaufende ein → "Brecher"



Oben: Brecherwellen im Ozean

Unten links: Entstehung von Brechern

Unten rechts (rot): Aufsteilen von Wellen im seichten Wasser

3. Grundlagen der Thermodynamik (TD)

- ideales Gas: Atome bzw. Moleküle bewegen sich frei und wechselwirken nur durch Zweier-Stöße (elastisch)
- ideale Gasgleichung:

$$PV = Nk_B T, \quad k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \dots \text{ Boltzmann Konstante}$$

$$R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \dots \text{ allgemeine Gaskonstante}$$

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \dots \text{ Avogadro'sche Zahl}$$

N ... Anzahl der Atome bzw. Moleküle

$$\nu = \frac{N}{N_A} \dots \text{ Anzahl der Mole}$$

$$n = \frac{N}{V} \dots \text{ Teilchenzahldichte}$$

$$\Rightarrow PV = N \frac{R}{N_A} T = \nu RT \Leftrightarrow P = nk_B T$$

- innere Energie eines idealen Gases: $U \equiv \varepsilon = f(T)$
- Zustandsfunktionen hängen von 2 TD-Variablen ab, z.B., P, S, T, V
- Zustandsfunktionen hängen nur von Anfangs- und Endzustand des Systems, aber nicht vom thermodynamischen Weg, ab
- Zustandsfunktionen (TD Potentiale):

$U = U(T, V) = U(S, V) \dots$ innere Energie

$H = H(T, V) = U + pV = \dots$ Enthalpie

$F = F(T, V) = \dots = U - TS \dots$ freie Energie

$G = G(T, V) = \dots = H - TS = U + PV - TS \dots$ freie Enthalpie
(ohne chemisches Potential)

- für ideales Gas gilt:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

$$\text{da } U = U(T): dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT$$

$$C_V := \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \dots \text{spezifische Waerme bei konst. Volumen}$$

$$\Rightarrow dU = C_V dT \Rightarrow U = C_V T (+U_0)$$

- ideales Gas mit f Freiheitsgraden (FG):

$$C_V = \frac{f}{2} k_B N$$

1-atomig: 3 FG (3 Translation)

2-atomig: 5 FG (3 Translation + 2 Rotation)

- z.B. HI-Gas:

$$U = \frac{3}{2} N k_B T$$

- 1. Hauptsatz der TD:

Die einem *abgeschlossenen System* (d.h. nicht in Wärmekontakt mit der Umgebung) zugefügte Wärme δQ ist gleich der Änderung der inneren Energie plus der am System geleisteten Arbeit δW :

$$\delta Q = dU + \delta W \Leftrightarrow TdS = dU + PdV$$

Dies entspricht dem *Energiesatz* unter Einbeziehung der Wärmeenergie.

- 2. Hauptsatz der TD:

Unmöglichkeit eines perpetuum mobile 2. Art, bzw.:

Es gibt keine Zustandsänderung, deren einziges Ergebnis die Übertragung von Energie eines Körpers niedrigerer Temperatur auf einen höherer Temperatur bei gleichzeitiger Arbeitsleistung ist.

$dS \geq 0$ “=” für den Fall reversibler Zustandsänderungen

- 3. Thermisches Gleichgewicht (TGGW):
Zwei Körper in thermischem Kontakt sind im TGGW, wenn sie die gleiche Temperatur haben, d.h. $T_1 = T_2$
- 4. Thermodynamisches Gleichgewicht (TDGGW):
Ein System ist im GGW, wenn die Entropie des Systems maximal ist.
Es gilt ferner ein Kräfte-GGW ($G = H - TS$... freie Enthalpie):
$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0$$

Ein System ist im TDGGW, wenn es im *thermischen*, *mechanischen* und *chemischen* GGW ist.

Nebenrechnung: Herleitung der TD Potentiale

- Legendre Transformation:

sei $f(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion und $u = \frac{\partial f}{\partial x}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx \equiv u dx$$

Dann soll fuer $g = g(u)$ gelten: $dg = \frac{\partial g}{\partial u} du \equiv x du$

$$\Rightarrow d(ux) = x du + u dx = dg + df$$

$$\Rightarrow dg = d(ux) - df$$

und nach Integration (da alles totale Differentiale):

$$g = ux - f \equiv ux(u) - f(x(u))$$

Wir haben somit eine Variablentransformation: $f(x(u)) \rightarrow g(u)$
durchgefuehrt!

- von den Potentialen, die von den *intensiven* (d.h. volumenunabhängigen) Größen P, T, V, S abhängen sind nur 2 Variablen unabhängig
- wir gehen vom 1.HS der TD aus:

$$U = U(S, V)$$

$$dU + PdV = TdS \Rightarrow dU = TdS - PdV$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial V} dV$$

durch Vergleich folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial V} = -P$$

und wenden jetzt die Legendre-Transformation für eine Funktion an, die von 2 (oder auch mehreren) Variablen abhängt, z.B. $f=f(x,y)$. Mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung bis zur 1. Ordnung gilt:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) \Leftrightarrow f(x_0, y) = f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0)$$

$$F(u, y) := f(x_0, y) \Rightarrow F(u, y)$$

$$\text{Für } x_0 = 0 \text{ gilt: } F(u, y) = f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x} x = f(x, y) - ux$$

$$\Rightarrow dF(u, y) \equiv d(f(x, y) - ux) = df(x, y) - udx - xdu$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{udx} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy - udx - xdu = \frac{\partial f}{\partial y} dy - udx$$

Hier sieht man sehr schön den Austausch der Variablen x mit u .

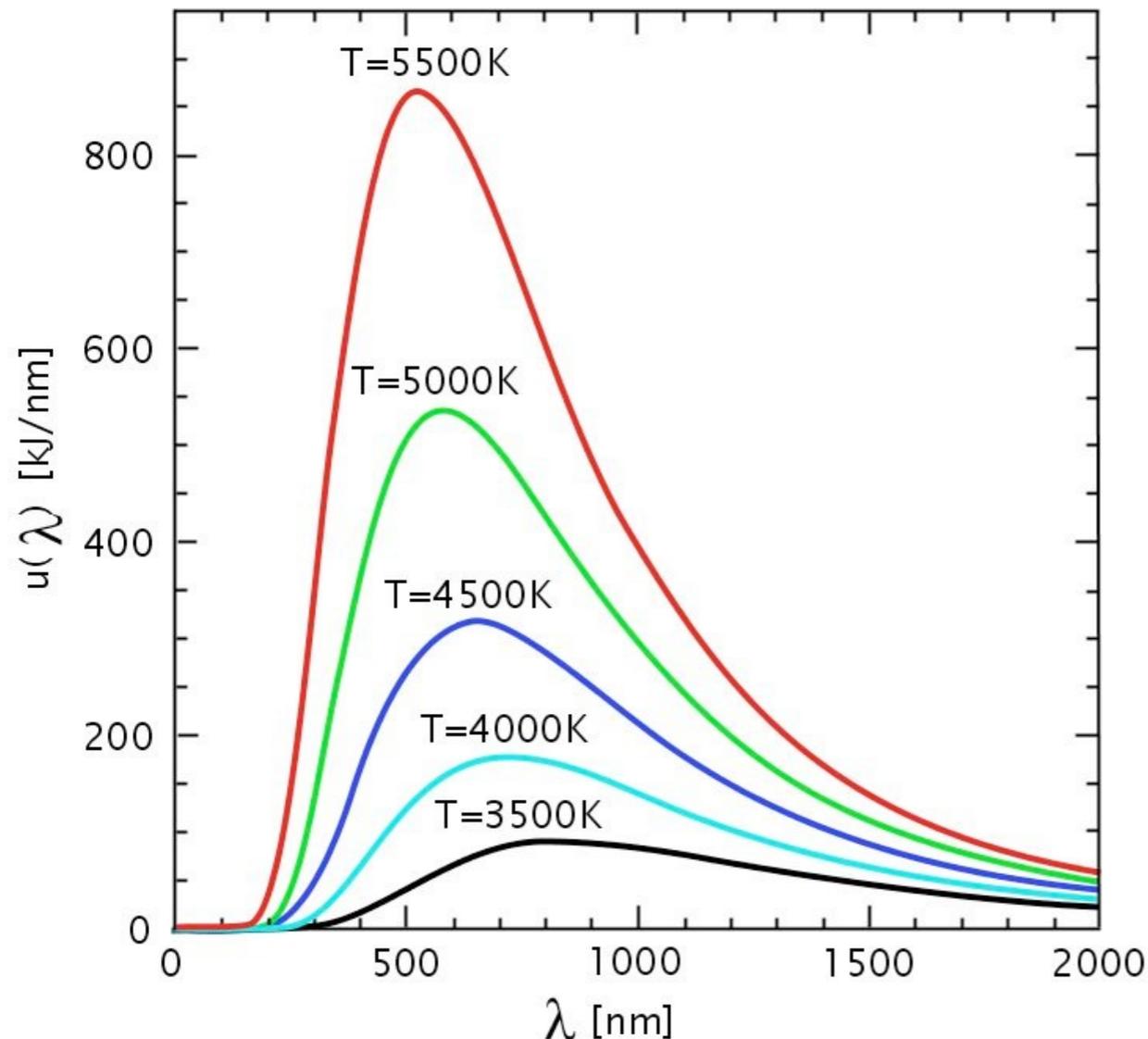
Damit gilt z.B. für die freie Energie $F = F(T, V)$:

$$u \leftrightarrow T, y \leftrightarrow V, x \leftrightarrow S, F \leftrightarrow F, f \leftrightarrow U$$

$$F(T, V) = U(S, V) - \frac{\partial U}{\partial S} S = U(S, V) - TS$$

4. Schwarzkörper-Strahlung

- Def.: Ein schwarzer Körper (engl. Black body = BB) absorbiert alle auf ihn einfallende Strahlung (d.h. er reflektiert und streut nicht) und reemittiert diese wieder. Das Spektrum eines BB hängt daher nur von seiner Temperatur ab.



- spektrale Intensität (Energie pro Fläche pro Frequenz) ist:

$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\exp \left[\frac{h\nu}{k_B T} \right] - 1 \right)^{-1}$$

Planck-Funktion

$h=6.63 \cdot 10^{-34}$ Js (Planck Konst.)

- Planck-Funktion kann auch in Abhängigkeit von λ geschrieben werden:

Wegen

$$c = \lambda \nu \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \Rightarrow B_\lambda = -B_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} = B_\nu \frac{c}{\lambda^2}$$

$$\text{also } B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \left(\exp\left[\frac{h\nu}{k_B T}\right] - 1 \right)^{-1}$$

$$\text{Einheiten: } [B_\lambda(T)] = W m^{-2} m^{-1} \text{sterad}^{-1}$$

- BB Strahlung kann durch einen Hohlraum, dessen Wände zu 100% absorbieren, erzeugt werden
- Strahlung ist im GGW mit Wänden
- Strahlungsenergie wird absorbiert und in thermische Energie der Atome in den Wänden umgewandelt: *thermische Strahlung*
- Planck-Spektrum ist ein *Kontinuum*

Näherungen

- Maximum:

$$\frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} = \frac{2hc^2}{\exp\left[\frac{hc}{\lambda k_B T} - 1\right]} \left(-5\lambda^{-6} - \lambda^{-5} \left[-\frac{hc}{\lambda^2 k_B T} \right] \frac{\exp\left[\frac{hc}{\lambda k_B T}\right]}{\exp\left[\frac{hc}{\lambda k_B T} - 1\right]} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2hc^2}{\lambda^7 \exp\left[\frac{hc}{\lambda k_B T} - 1\right]^2} \left(-5\lambda \exp\left[\frac{hc}{\lambda k_B T} - 1\right] + \frac{hc}{k_B T} \exp\left[\frac{hc}{\lambda k_B T}\right] \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{hc}{5k_B T} \frac{\exp\left[\frac{hc}{\lambda k_B T}\right]}{\exp\left[\frac{hc}{\lambda k_B T} - 1\right]} \quad (\text{transzendente Gl. der Form } \frac{xe^x}{e^x - 1} - 5 = 0)$$

Loesung mit Hilfe der Lambert W-Funktion: $F(W) = We^W$

$\lambda_{\max} T \approx b = 0.002898 \text{ K m}$ (Wien'sches Verschiebungsgesetz)

- Wien'sches Gesetz (kleine Wellenlängen/hohe Frequenzen):

$$\exp\left[\frac{hc}{\lambda k_B T}\right] \gg 1 : B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left[-\frac{hc}{\lambda k_B T}\right]$$

- Rayleigh-Jeans Gesetz (große Wellenlängen):

$$\lambda \gg \lambda_{\max} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda k_B T} \ll 1 : \exp\left[\frac{hc}{\lambda k_B T}\right] = 1 + \frac{hc}{\lambda k_B T} + O(\lambda^2) \text{ (Taylor-Entwicklung)}$$

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{\lambda k_B T}{hc} = \frac{2k_B c T}{\lambda^4}$$

Dies ist das klassische Resultat aus der E-Dynamik und führt für kleine λ zur Divergenz (UV-Katastrophe)

Formel ist nützlich in der Radioastronomie (große λ)

Stefan-Boltzmann'sches Strahlungsgesetz

- berechne gesamte abgestrahlte Leistung, d.h. über alle Wellenlängen integriert:

$$B(T) = \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) d\nu = \frac{2h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left[\frac{h\nu}{k_B T} - 1\right]}$$

substituiere: $\frac{h\nu}{k_B T} = x \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx$

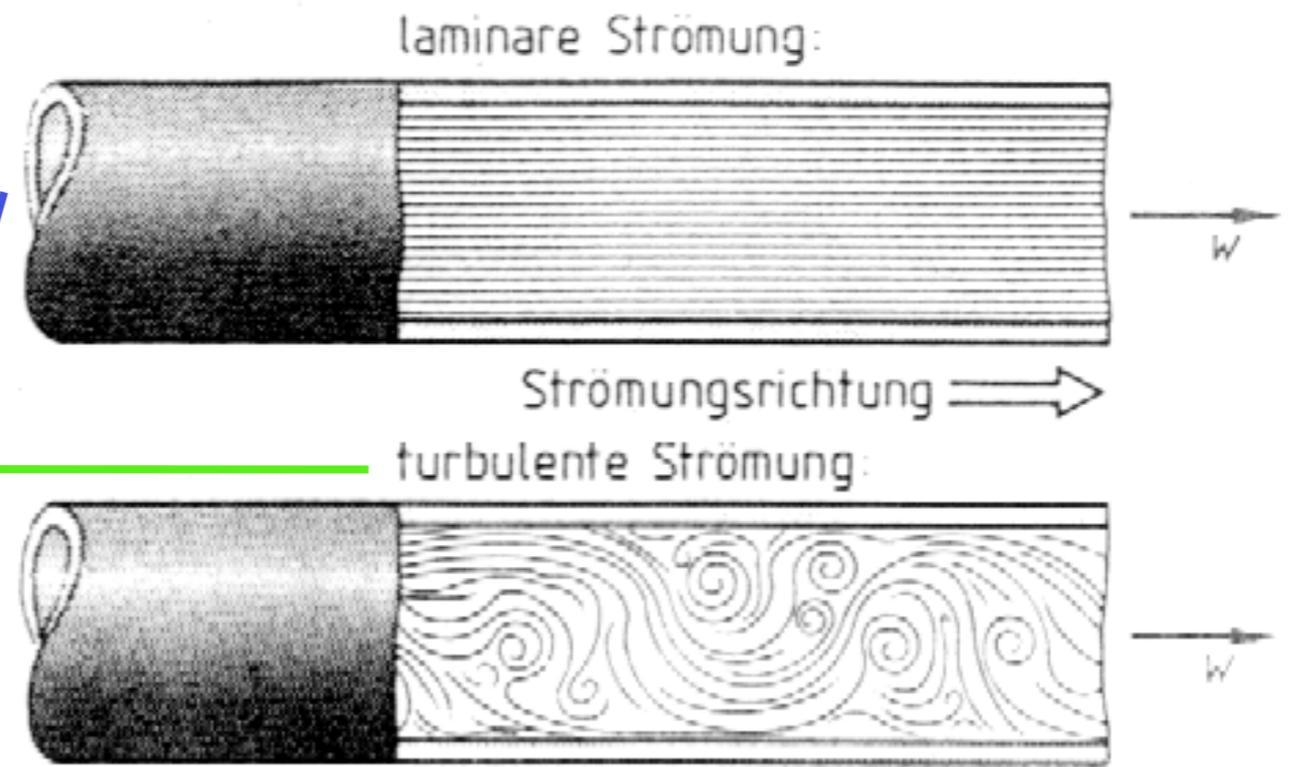
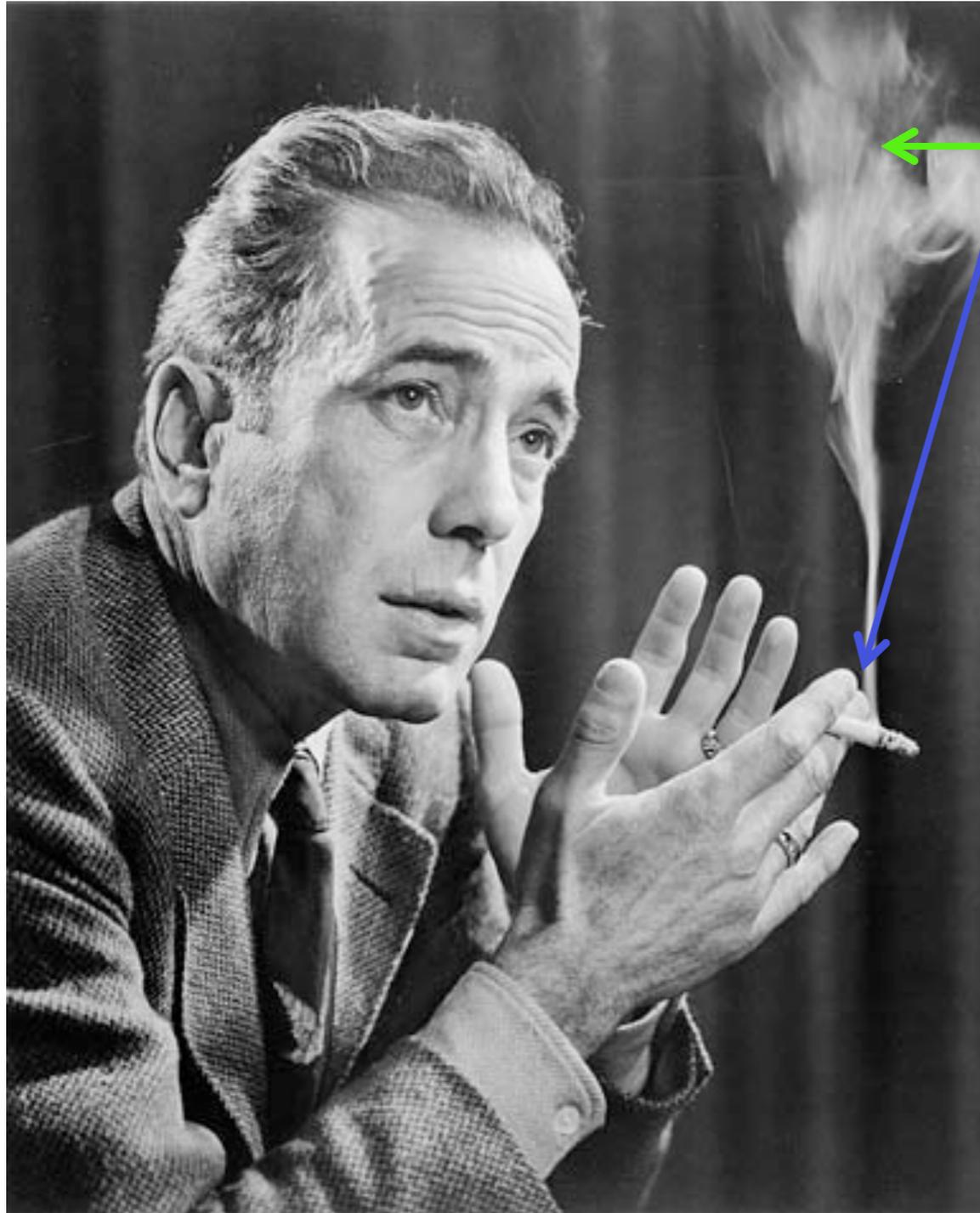
$$\Rightarrow B(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{k_B^4}{h^4} T^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2}{c^2} \frac{k_B^4}{h^3} \frac{\pi^5}{15} T^4$$

- Für isotrope Strahlung einer Quelle mit Intensität B gilt für die Flussdichte das Stefan-Boltzmann'sches Strahlungsgesetz:

$$F = \pi B = \sigma T^4 \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$$

- Leuchtkraft einer Quelle, z.B. Stern: $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$

5. Turbulenz



Def.: Reynolds-Zahl $Re = \frac{uL}{\nu}$

Re gibt das Verhältnis von Trägheits- zu viskosen Kräften an
u ... Strömungsgeschwindigkeit, Längenskala der Strömung

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$... kinematische Viskosität, η ... dynamische Viskosität

- Re leitet sich ab aus der Navier-Stokes-Gl. (= Bewegungsgl. für viskose Fluide (= Flüssigkeiten oder Gase))
- Einfachster Fall: inkompressible Newton'sche Fluide

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{F}_{ext}$$

- betrachte Größenverhältnisse

Trägheitsterm: $du/dt \sim u/T \sim u^2/L$

Viskositätsterm: $(\eta/\rho)d^2u/dx^2 \sim \nu u/L^2$

ins Verhältnis setzen: $Re = (u^2/L) / (\nu u/L^2) = uL/\nu$

$Re \leq 1000$: laminare Strömung

$1000 \leq Re \leq 3000$: Übergangsregion

$Re \geq 3000$: turbulente Strömung

Zum Virial-Theorem I (gebundene Systeme)

- Beispiel: Kugelsternhaufen (Omega Centauri)
- es gibt ca. 158 Kugelsternhaufen, die sich in einer Kugel um die Milchstraße mit Radius 50 kpc gruppieren



*Credit: R. Gendler
(ESA/Hubble)*

“Zoom” auf den Kugelsternhaufen Omega Centauri, beginnend mit einer Weitwinkelaufnahme der Region Centaurus

Omega Centauri: $d=4.85$ kpc, $M= 5 \cdot 10^6 M_{\text{sol}}$, $R \sim 30$ pc, Alter: $12 \cdot 10^9$ a

Virial-Theorem II

- Beispiel: Kugelsternhaufen (Omega Centauri)



Omega Centauri: $d=4.85$ kpc, $M= 5 \cdot 10^6 M_{\text{sol}}$, $R \sim 30$ pc, Alter: $12 \cdot 10^9$ a